Escuela Normal "José María Torres"

MATEMÁTICA

2DO AÑO

<u>*Profesoras:*</u>

- *Roxana Boxler*
- *Andrea Cian*

El conjunto de los **número naturales** (N) está formado por el cero y todos los números positivos. Además, cumple propiedades que son muy importantes de recordar antes de seguir avanzando con nuevos conocimientos. Analizaremos las diferentes operaciones y algunas de sus propiedades.

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

El cero siempre fue un problema para los matemáticos, algunos decían que no era un número, porque no representaba una cantidad, pero otros planteaban que era necesario un símbolo que indicara la ausencia, la "nada". En la actualidad, es muy importante para todos los sistemas de numeración, pero sigue siendo un punto en el que los matemáticos no logran ponerse de acuerdo, encontrarán algunos autores que no lo consideran un número natural y otros que sí. En el desarrollo de esta unidad, vamos a tomar el criterio de que el cero es un número natural.

Los naturales forman un conjunto de números infinitos, el más pequeño es el cero, pero no hay un último elemento. Por eso, decimos que es infinito.

Ley de cierre

Esta propiedad nos indica que cada vez que realicemos una operación en un conjunto numérico el resultado también pertenece a ese conjunto.

En lenguaje simbólico: A ε N

En lenguaje coloquial: A pertenece al conjunto de los números naturales.

El resultado de operar con A y B también es un número natural: B ε N

El símbolo ε significa "pertenece".

Propiedad conmutativa

El orden de los elementos puede ser conmutado al operar y el resultado no cambia.

En lenguaje simbólico:

$$A * B = B * A$$

* representa una operación cualquiera

Propiedad asociativa

Al operar con tres o más elementos asociándolos de diferentes maneras, el resultado no cambia.

En lenguaje simbólico:

$$A * B * C = A * (B * C) = (A * B) * C$$

VOCABULARIO

Conmutar: invertir o permutar dos elementos.

Asociar: unir o juntar varios elementos.

¡A PENSAR!

1. Completen el cuadro de ser posible con un ejemplo que verifique cada una de las propiedades indicadas y de no ser posible con un contra ejemplo que demuestre que no se cumple.

	Suma	Resta	División	Multiplicación
Ley de cierre				
Conmutativa				
Asociativa				

2. Respondan:

¿Todas las operaciones cumplen la ley de cierre?

La ...... y la ...... no cumplen la ley de cierre.

4 - 1 = 3 pero   4 - 7 = ?

El 3 pertenece a los números naturales, pero el resultado de 4 - 7 no es un número natural.

4 : 2 = 2 pero   4 : 3 = ?

El dos es un número natural, pero el resultado de 4 : 3 no lo es.

Analicemos la propiedad conmutativa y asociativa.

La ...... y la ...... no cumplen la propiedad conmutativa y asociativa.

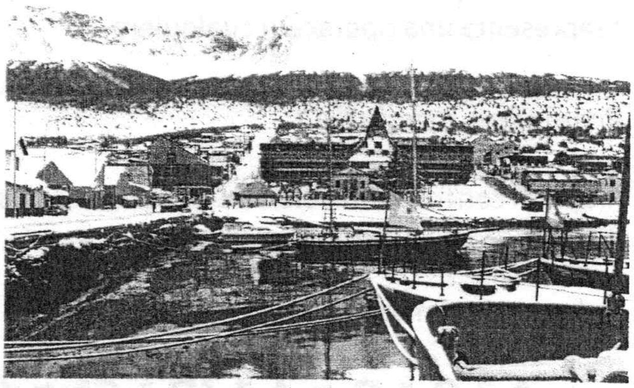
Conmutativa: $3 - 4 \neq 4 - 3$ $8 : 2 \neq 2 : 8$

Asociativa: $10 - 2 - 3 \neq 10 - (2 - 3)$ $(20 : 10) : 2 \neq 20 : (10 : 2)$

Que una operación no cumpla una propiedad no quiere decir que no se pueda hacer, pero para poder llevarla a cabo vamos a necesitar conocer otros conjuntos numéricos.

Caminando en línea recta

Ese día la temperatura en Buenos Aires fue de 1 °C



Mientras que la temperatura en Ushuaia fue de -12 °C

Ya resolvieron algunos problemas utilizando los números naturales. Esos números, como ya vieron, sirven para contar. Sumar y multiplicar dos números naturales no trae problemas. Pero si se quiere restar dos números naturales, sucede algo más complicado.

CUESTIÓN: ¿EN QUÉ CASOS LA RESTA ENTRE DOS NÚMEROS NATURALES PUEDE TRAER PROBLEMAS?

2 Números enteros

Seguramente ya se dieron cuenta de que los dos casos en los cuales la diferencia no es un número natural son:

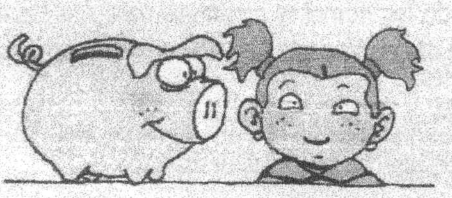
a) cuando el minuendo es menor que el sustraendo, por ejemplo: $2 - 5 = \square$

b) cuando minuendo y sustraendo son iguales, por ejemplo: $6 - 6 = \square$

¿Qué conviene hacer? No podemos decir simplemente "nada" y quedarnos de brazos cruzados. Ahora verán por qué.

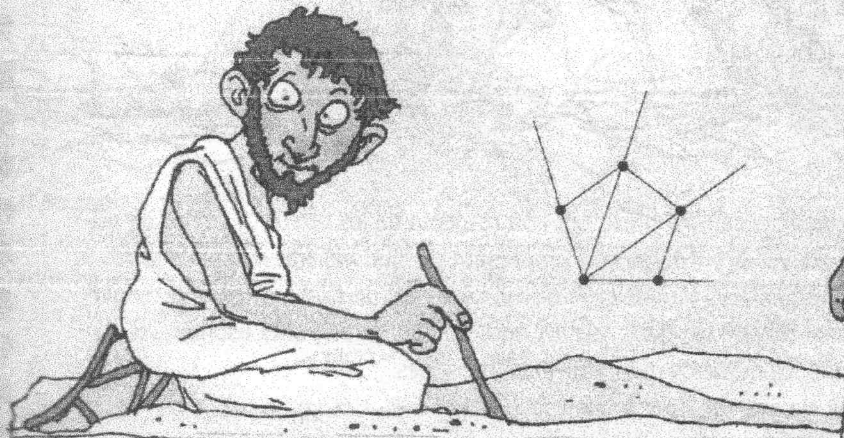
Los números negativos

Alrededor del año 700, los hindúes descubrieron que necesitaban introducir nuevos números que servirían para resolver algunos problemas que los números hasta entonces conocidos, llamados después naturales, no permitían resolver. Los hindúes consideraron que, así como los números naturales podían ser usados para representar bienes, era útil tener otros números para representar deudas.



Por ejemplo, una persona que tiene 5 pesos podría representar ese capital por el número 5, mientras que una persona que debe cinco pesos podría decir que su fortuna es de -5 pesos. En este caso se dice que -5 es un *número negativo.*

También se usan números negativos cuando se trata de ubicar un hecho a partir de otro acontecimiento importante. En nuestra cultura, el acontecimiento que se usa como referencia es el nacimiento de Cristo. Se dice, por ejemplo que los pitagóricos trabajaron en aritmética 500 años antes de Cristo, o que el descubrimiento de América fue en el año 1492 después de Cristo. En símbolos, la época de los pitagóricos se puede escribir como el año -500, y el descubrimiento de América se escribe $+1492$.



CUESTIÓN: ¿CUÁNTOS AÑOS PASARON ENTRE LOS PITAGÓRICOS Y EL PRIMER VIAJE DE COLÓN? ¿CÓMO LOS CALCULARÍAN?

2.1 Números negativos

PARA RESOLVER CON LO QUE SABEN

Les proponemos resolver los siguientes problemas, en los que resulta conveniente utilizar números enteros negativos.

PROBLEMA 1

En un día de invierno, a las 12 horas se registraba una temperatura de 0°. A la medianoche, el servicio meteorológico anunciaba que la temperatura había descendido 6° con respecto a la del mediodía. ¿Cuál era la temperatura a la medianoche?

PROBLEMA 2

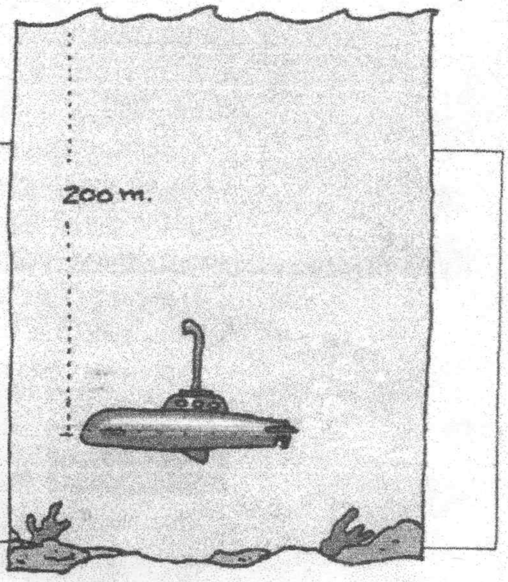
La mamá de Diego va al banco a pagar impuestos cuyos montos son $ 20 y $ 32. Si en su cartera tiene solo un billete de $ 50, ¿podrá pagar toda la deuda? Si no es así, ¿cuánto dinero le falta?

PROBLEMA 3

Un submarino navega a 200 metros de profundidad bajo el nivel del mar. Dispara dos cohetes: el primero asciende 150 metros y el segundo asciende 300 metros.

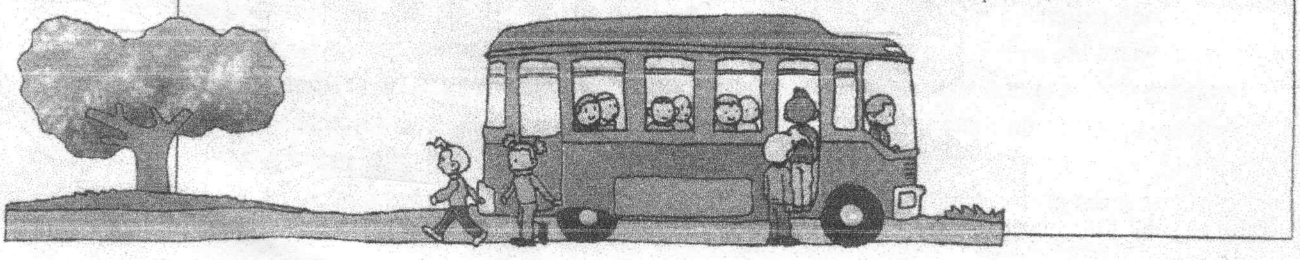
a) ¿Ascendieron los dos cohetes por encima del nivel del mar?

b) ¿Qué número asignarían a las posiciones alcanzadas por cada uno de ellos?



PROBLEMA 4

Un ómnibus de media distancia parte de Rosario con 38 pasajeros a bordo. En la primera parada se bajan 7 y suben 5, en la segunda parada bajan 11 personas. En la tercera suben 3 y no baja nadie. ¿Cuántos pasajeros quedan en el ómnibus después de la tercera parada?

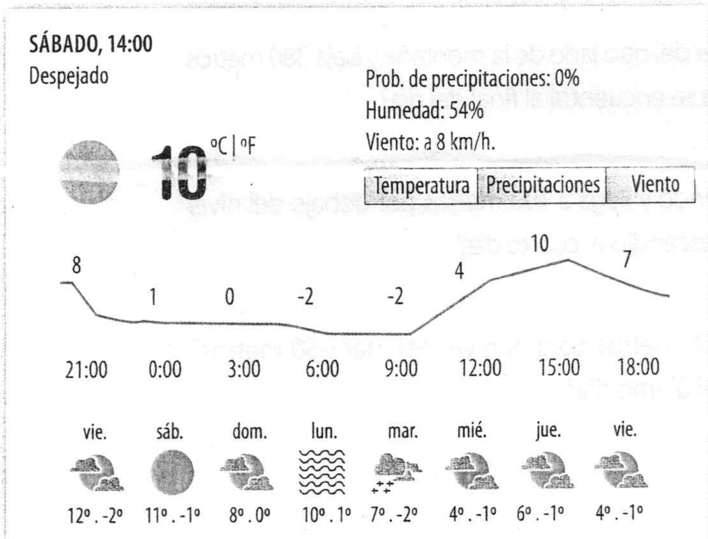


NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS

1. Sol subió al ascensor de su edificio en la cochera que está en el segundo subsuelo.
   a) Si vive en el quinto piso, ¿cuántos pisos subió por ascensor? ....
   b) Para visitar a una vecina, Sol subió 9 pisos en ascensor desde su cochera. ¿En qué piso vive su vecina? ....
   c) Su vecina tiene la cochera en el tercer subsuelo. ¿Cuántos pisos tiene que bajar en el ascensor desde su departamento para llegar a su cochera? ....
   d) Otro vecino, que vive en el décimo piso, tiene que bajar 11 pisos para llegar a su cochera. ¿En qué piso se encuentra la cochera? ....

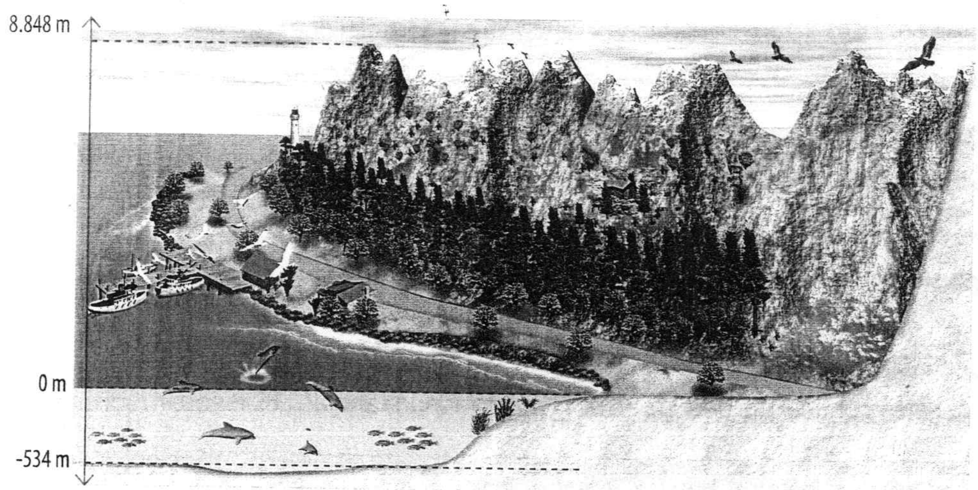
2. María tiene una deuda de $150 en su banco.
   a) Realiza un pago con tarjeta y contrae otra deuda de $175. ¿Cuánto adeuda ahora?
   ....
   b) Al día siguiente, deposita en su cuenta $400 para saldar su deuda. ¿Cuánto dinero le queda en la cuenta? Escribí el cálculo que hiciste para resolver esta situación.
   ....
   c) Luego gasta, nuevamente con su tarjeta de crédito, $210. Después de la compra, ¿tendrá saldo positivo o negativo en su cuenta? ¿De cuánto será el saldo?
   ....

3. EN GRUPOS. La siguiente imagen muestra las temperaturas que harán en la ciudad de San Carlos de Bariloche durante una semana.



   a) La amplitud térmica es la diferencia entre la temperatura máxima y la mínima. ¿Qué amplitud térmica habrá el lunes en Bariloche? ....
   b) ¿Y el sábado? ....
   c) ¿Cuál es la diferencia entre las temperaturas máximas que habrá el martes y el miércoles? ....
   d) ¿Y entre las mínimas de esos días? ....

4. Observá la siguiente imagen. Exponé qué criterios se tienen para determinar la altura de una montaña o del fondo del mar.



5. Un alpinista hará una travesía de 5 días, durante la cual tendrá que caminar por montañas y depresiones. Comienza su recorrido en un pueblo que se encuentra a 50 metros de altura sobre el nivel del mar.
   a) El primer día asciende 200 metros. ¿A qué altura llega al final del día?

   b) El segundo día continúa ascendiendo y llega a la cima de la montaña, que está a 350 metros. ¿Cuántos metros ascendió el alpinista ese día?

   c) El tercer día comienza a descender del otro lado de la montaña y baja 380 metros durante todo el día. ¿A qué altura se encuentra al final del día?

   d) El cuarto día continúa descendiendo y llega a 100 metros por debajo del nivel del mar (-100 metros). ¿Cuánto descendió el cuarto día?

   e) El quinto día llega a destino a 50 metros bajo el nivel del mar (-50 metros). ¿Ascendió o descendió durante el último día?

CARGANDO DATOS

Números enteros negativos

Los números negativos se usan para representar situaciones en las que es necesario indicar valores menores que 0; por ejemplo, temperaturas, alturas, situaciones comerciales.

Se escriben con un signo menos delante del número. Por ejemplo: -8 se lee "menos ocho" y es 8 unidades menor que el cero.

Los **números naturales** y los **negativos** forman el conjunto de **números enteros**.

Para ocasiones como esta última, o para resolver restas que en el conjunto de los números naturales no tienen solución, fue creado el conjunto de los **números enteros**, que se representan con la letra Z.

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} Z^{+} = \{1, 2, 3,...\} \\ \{0\} \end{array}\right\} N \\ Z^{-} = \{-1, -2, -3,...\} \end{array} \right.$$

Los números enteros positivos pueden escribirse con un signo + adelante. Por ejemplo: 8 puede escribirse como +8.

Los números enteros negativos se escriben con el signo - adelante. Por ejemplo: -8.

6 Con un compañero de banco, en forma alternada, deben decir un número, con la única condición que cada uno diga uno que sea mayor al del otro. Por ejemplo: si Juan dice 15, el de Pedro deberá ser cualquiera que sea mayor a 15.
Ahora juguemos al revés, cada uno debe decir uno más pequeño que el de su compañero.

a. ¿Quién gana el juego? Expliquen las conclusiones obtenidas.

b. ¿Cuál es el número entero más pequeño y cuál el mayor?

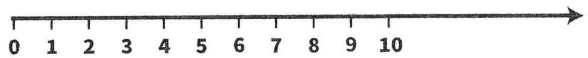
El conjunto de números enteros está formado por infinitos números, no tiene ni primer ni último elemento ya que siempre podemos encontrar uno más grande o uno más pequeño.

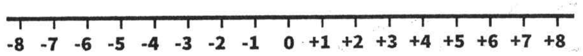
Z={... -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...}

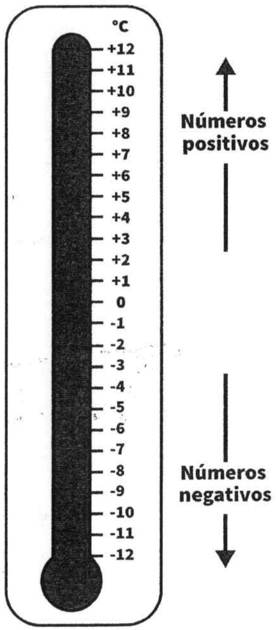
7 Miren el termómetro y respondan:

a. ¿Cuántos números hay entre el 9 y el 12? ¿Y entre el -4 y el 2?

Al igual que los números naturales es un conjunto discreto, quiere decir que entre dos números enteros hay una cantidad finita de enteros.







b. ¿Qué diferencia hay entre las dos rectas?

c. ¿Cuántos números enteros hay entre el -4 y el 0? ¿Y entre el 4 y el 0?

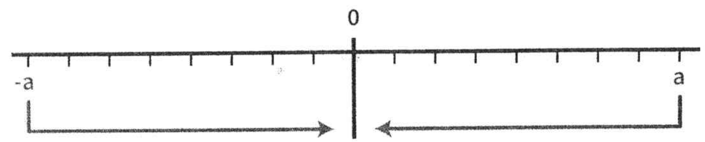
d. Completen con la distancia al cero en cada caso:

Números	Distancia
5	
-5	
8	
-8	
25	
-25	

Opuesto

Todo número entero tiene un **opuesto**, que se encuentra a igual distancia del cero y tiene signo contrario. El cero no es positivo, ni negativo.

En lenguaje simbólico: a es el opuesto de -a.



8. Completen:

Número	Opuesto
-6	
5	
	4
	-3
0	

Módulo o valor absoluto

Se denomina así a la distancia que hay entre un número y el cero. Como es una distancia, este valor es siempre positivo y se escribe entre dos barras verticales.

|a| = a

Se lee: módulo de a

|-a| = a

Se lee: módulo del opuesto de a

Ejemplos:

|5| = 5 |-5| = 5   Tanto el 5 como su opuesto están a 5 lugares del cero; por lo tanto, tienen igual módulo.

9. Completen:

Número	Opuesto	Módulo
4		
	5	
-3		
	-15	
125		
	300	

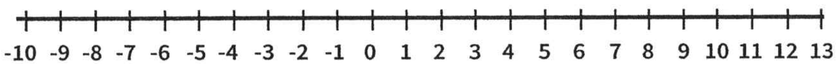
10. Si el módulo de un número es 10, ¿de qué número estamos hablando?

11. Las siguientes temperaturas se registraron en Argentina. Ordénenlas de menor a mayor.

Mendoza: -8 °C   San Luis: 10 °C   Tierra del Fuego: -10 °C   Jujuy: 7 °C

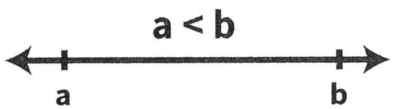
Buenos Aires: 4 °C   La Pampa: 15 °C   Bariloche: -1 °C   La Rioja: 0 °C

12. Ubiquen las temperaturas anteriores en la siguiente recta numérica:

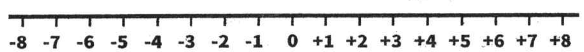


Orden en los números enteros

Si un número está a la izquierda de otro, es menor.

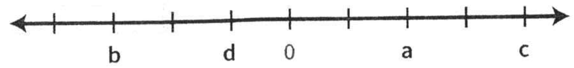


En la recta numérica, los números están ordenados de izquierda a derecha, de menor a mayor.



Como se puede ver en la recta, el -8 es menor al -7 y el -1 es menor al 0.

13. Completen las siguientes oraciones, a partir de la recta numérica.



a. a y c son números …

b. b y d están a la … del cero por eso son números …

c. a es mayor que … y … y menor que …

d. d es menor que …

14. Completen con < o > según corresponda.

a. -10 … -12   c. -5 … 0   e. 8 … 10

b. 1 … -1   d. -1 … -15   f. |8| … -2

15. Completen:

Anterior	Número	Posterior
	0	
	-5	
2		
		-15
		0

16. Respondan lo pedido a partir de los números dados.

Si A = 13   y   B = -11

-A =   -B = |-A| =

|A| = |-B| = |B| =

17. Escriban un número entero que corresponda a cada situación.

a. Un avión vuela a 200 metros de altura. …

b. Roma se fundó en 753 a. C. …

c. La temperatura fue de 12 grados bajo cero. …

d. Un equipo de fútbol terminó con cinco goles en contra. …

e. Felipe gastó $300 en un pantalón. …

f. A Camila le regalaron ocho figuritas para su álbum. …

g. Abril se sumergió 4 metros en la pileta. …

Más actividades

18 En el centro meteorológico de Santa María, Catamarca, se tomó la temperatura en distintos días y horarios. Juan, el meteorólogo, confeccionó esta tabla.

Día \ Horario	0	De 0 a 8	De 8 a 16	16
Lunes	6 °C	Bajó 4 °C	Subió 3 °C	
Martes	8 °C	Bajó 9 °C	Bajó 7 °C	
Miércoles	−4 °C	Subió 10 °C	Subió 2 °C	
Jueves	3 °C			−8 °C

a. Completá la tabla con las temperaturas a las 16 de lunes, martes y miércoles.

b. El jueves a las 8 hizo 1 °C. Completá los dos valores que faltan en la tabla. ¿Cuánto varió la temperatura desde las 0 hasta las 16?

c. El viernes a las 8 hizo −10 °C y a las 16 hizo −7 °C. ¿Cuánto varió la temperatura entre las 8 y las 16?

19 Completá la tabla con el número anterior y el siguiente de cada número dado.

Anterior									
Número	−5	−3	−1.673	0	3	−1.200	−99	−1.000	−259
Siguiente									

20 En cada caso, escribí >, < o = según corresponda.

a. 2 .... −5 b. −4 .... −7 c. −4 0

d. −569 .... −365 e. −698 .... −653 f. 3 .... −478

21 En cada caso, decidí si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Explicá tus decisiones.

a. −36 < −37

b. El siguiente de −100 es −101.

c. 47 > −101

d. El anterior de 99 es 100.

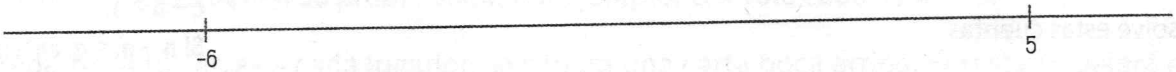
e. El siguiente de −99 es −100.

f. −45 > −13

22 En esta recta numérica, ubicá los números: 6, 4, −5 y sus opuestos.

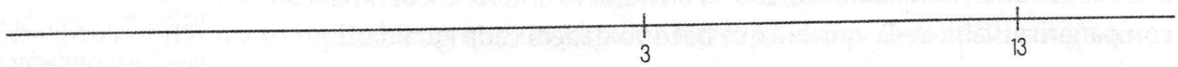
23 En cada recta numérica, ubicá el 0, el 1, el −2 y los opuestos de los números marcados.

a.

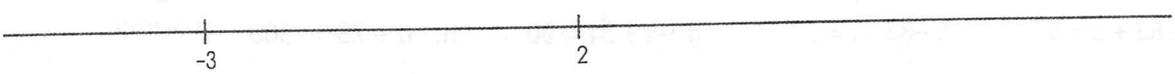


b.

c.

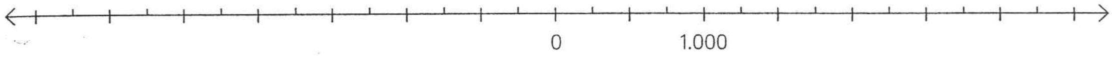


d.



24. Un avión a 3.000 metros de altura sobre el nivel del mar sobrevuela a un submarino que está a 3.000 metros de profundidad. Al cabo de 2 horas, el submarino sube 500 metros y el avión desciende 1.000 metros.

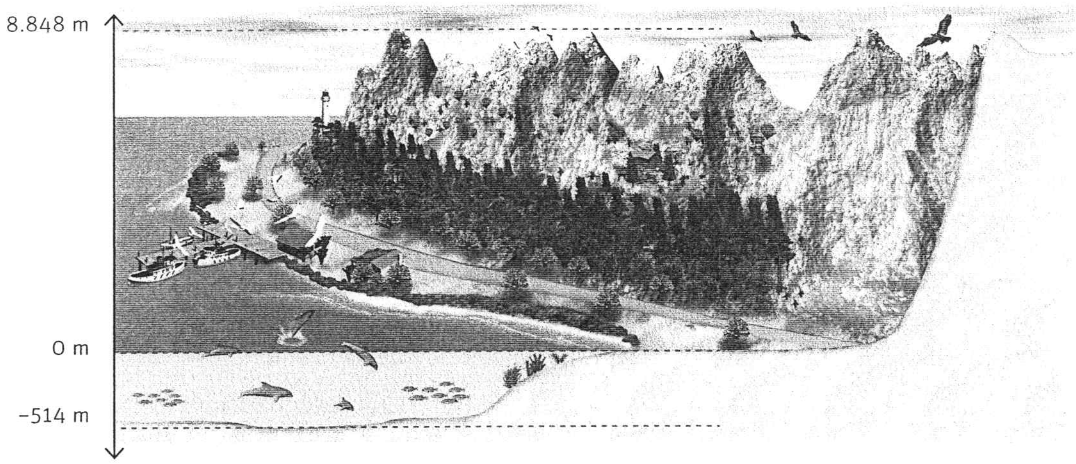
a. Representá en esta recta numérica la profundidad de cada vehículo al principio y dos horas después. Podés usar diferentes colores.



b. ¿Cuál de los dos vehículos está más cerca del nivel del mar a las 2 horas?

____

25. Observá la siguiente imagen y resolvé las consignas en la carpeta.



a. Si un delfín nada a igual distancia de la superficie del mar que de su fondo, ¿a qué profundidad se encuentra respecto del nivel del mar?

b. Si un ave vuela 650 metros más alto que el fondo del mar, ¿a qué altura sobre el nivel del mar se encuentra?

Operando con enteros

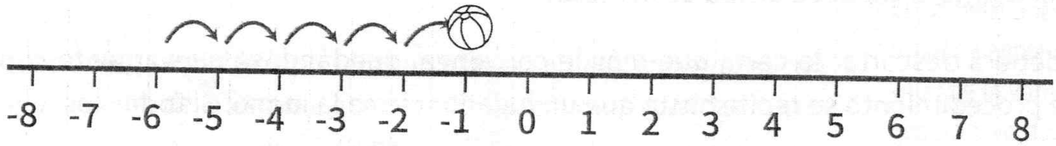
Adición y sustracción

1. Resuelvan pensando en los saltos de la pelota sobre la recta numérica.

a. ¿Cuánto hay que sumarle a -6 para obtener 4?

b. ¿A -5 para obtener -3?

c. ¿Y a -2 para obtener -4?



2. Expresen un cálculo para cada una de las situaciones anteriores.

a. ....

b. ....

c. ....

3. Resuelvan los siguientes cálculos. Recuerden los saltos de la pelota, los que están hacia la derecha se expresan sumando y los de la izquierda, restando.

a. 14 - 11 =	c. -22 + 22 =	e. -8 + 10 =	g. -15 + 5 =
b. 8 - 10 =	d. -15 - 10 =	f. 18 + 21 =	h. 120 – 121 =

Al sumar números enteros, nos podemos encontrar con dos posibilidades:

$$a + (+b) \quad \text{o} \quad a + (-b)$$

En el primer caso, estamos desplazándonos hacia la derecha en la recta numérica, mientras que en el segundo caso nos desplazamos hacia la izquierda.

Por ejemplo:

-4 + (+3) = -1 ⟶ partimos de -4 y nos desplazamos a la derecha tres lugares

7 + (+9) = 16 ⟶ partimos del 7 y nos desplazamos a la derecha nueve lugares

-4 + (-3) = -7 ⟶ partimos del -4 y nos desplazamos a la izquierda tres lugares

7 + (-9) = -2 ⟶ partimos del 7 y nos desplazamos a la izquierda nueve lugares

En la suma de números enteros, podemos suprimir los paréntesis.

$$a + (+b) = a + b \quad \text{y} \quad a + (-b) = a - b$$

Ejemplos:

-5 + (+3) = -5 + 3 = -2

-7 + (-9) = - 7 - 9 = -16

En el caso de la resta de números enteros, debemos pensar que es lo mismo que sumar su opuesto.

$$a - (+b) = a + (-b) = a - b \qquad a - (-b) = a + (+b) = a + b$$

Ejemplo:

-3 - (+5) = -3 + (-5) = - 3 -5 = -8   -5 - (-4) = -5 + (+4) = -5 + 4 = -1

¡A PENSAR!

3. Resuelvan las siguientes sumas y restas, eliminando los paréntesis.

a. 14 - (-11) =	d. -20 + (+50) =	g. -3 - (-8) =	j. 98 - (-8) =
b. -3 + (-8) =	e. 98 + (-8) =	h. -22 - (-20) =	k. -3 - (+8) =
c. -22 + (-20) =	f. 14 - (+11) =	i. -20 - (+50) =	l. -22 + (+20) =

4. Escriban un cálculo para cada una de las siguientes situaciones y resuelvan.

a. ¿Cuántos pisos debe subir un ascensor para pasar del segundo subsuelo al quinto piso?

b. La temperatura de un lugar pasó de 15 °C a 3 °C bajo cero. ¿Cuánto bajó la temperatura?

c. Un filósofo nació en el año 4 a. C. y murió en el 52 d. C. ¿Cuántos años vivió?

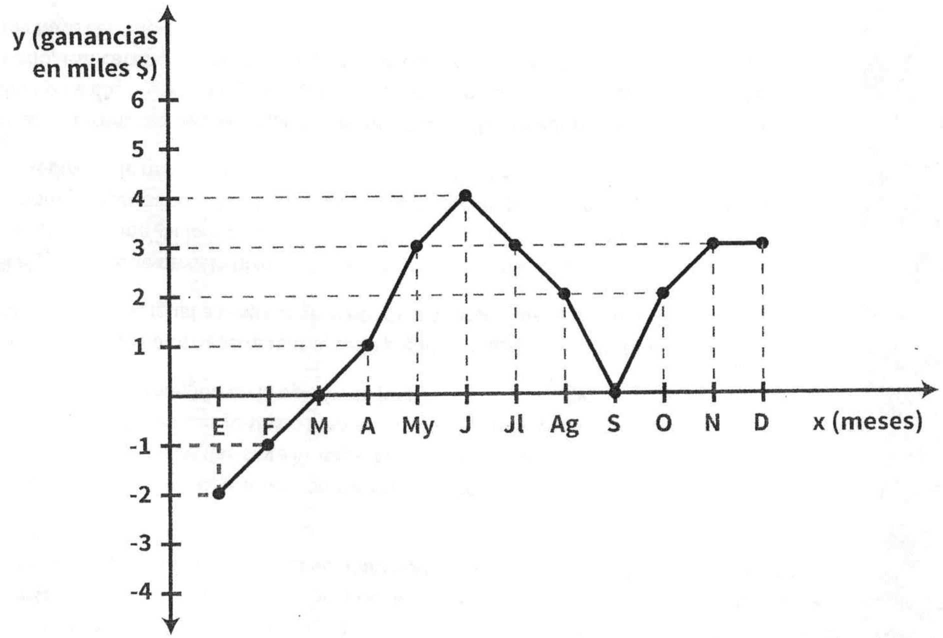
d. Un pez que se encuentra a 54 metros de profundidad, nada hasta llegar a los 20 metros bajo el nivel del mar. ¿Cuántos metros ascendió?

5. El gráfico muestra las ganancias y pérdidas de una empresa, expresada en miles. Respondan:

a. ¿En qué meses la empresa tiene ganancias? ¿En cuáles pérdidas?

b. ¿En qué meses la empresa no tuvo ni ganancias ni pérdidas? ¿Cómo se dieron cuenta?

c. ¿Cuál es el mes con mayor ganancia? ¿Y con mayor pérdida?



6. Indiquen Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifiquen las respuestas falsas.

a. La suma de dos números positivos siempre es otro positivo.

b. La resta de dos números positivos siempre es otro positivo.

c. La suma de dos números negativos siempre es otro negativo.

d. La resta de dos números negativos siempre es otro negativo.

7. Resuelvan las siguientes operaciones:

a. $|-3| + |-2| =$ b. $-4 + |+5| =$ c. $7 - |-10| =$ d. $|-18| - |-30| =$

Una regla práctica para sumar y restar números enteros:

Si tienen distinto signo, al de mayor módulo se le resta el de menor módulo y el signo que queda es el correspondiente al de mayor módulo.

Ejemplo: $+25 - 33 =$

Como tienen diferente signo resto 33 - 25, que da como resultado 8 y como el de mayor módulo es negativo, entonces el resultado es negativo.

$$+25 - 33 = -8$$

Si ambos tienen igual signo, se suman los módulos y queda el signo de la operación.

Ejemplos: $+25 + 11 = +36$ $-25 - 11 = -36$

A partir de la suma de dos números, por ejemplo, $57 + 42 = 99$, se pueden deducir dos restas: $99 - 57 = 42$ y también $99 - 42 = 57$.
A partir de una resta de dos números, por ejemplo, $46 - 14 = 32$, se puede deducir: una suma, $32 + 14 = 46$, y una resta, $46 - 32 = 14$.
Estas relaciones también son ciertas si se suman o restan números negativos. Por ejemplo, como $500 + (-400) = 100$, entonces $100 - (-400) = 500$. Como $100 - (-400)$ da por resultado 500, entonces restar -400 es lo mismo que sumar 400. Es decir que $100 - (-400)$ es equivalente a $100 + 400$ y el resultado es 500.
Restar un número negativo es equivalente a sumar su opuesto.

Si $a + b = c$, entonces vale que $c - a = b$ y que $c - b = a$.
Si $n - m = q$, entonces vale que $n - q = m$ y que $q + m = n$.
Estas relaciones pueden ayudar a encontrar el valor de la variable que hace verdadera la igualdad de una ecuación.

8. a. ¿Cuánto hay que sumarle a 4 para obtener -5?

b. ¿Y cuánto hay que restarle a 4 para obtener 10?

9. En estas ecuaciones, la variable representa un número entero. Encuentren con un compañero el valor de la variable que hace verdadera cada igualdad.

a. $x + 9 = -5$ b. $6 - a = 8$ c. $-12 = b + 47$ d. $-132 = -87 + p$

e. $-83 + z = 57$ f. $-83 - t = 57$ g. $-x + 51 = 90$ h. $-a + 78 = -300$

Sumas algebraicas

El balance de un kiosco indica:

Enero	Ganancia	$150
Febrero	Pérdida	$80
Marzo	Pérdida	$20
Abril	Ganancia	$40
Mayo	Ganancia	$20
Junio	Pérdida	$200

10. Escriban un cálculo que represente la situación y analicen si al cierre del balance, el kiosco quedó con ganancias o pérdidas. ¿Cuál es el monto?

La sucesión de sumas y restas recibe el nombre de **sumas algebraicas**. Para trabajarlas previamente vamos a analizar algunas propiedades de los números enteros.

Ley de cierre

Siempre que sumemos o restemos números enteros, obtenemos por resultado un nuevo número entero.

$$a \pm b = c \qquad c \,\varepsilon\, Z$$

El símbolo ε significa "pertenece".

Asociativa

$$a + b + c = d \qquad a + (b + c) = d \qquad a - b - c = d \qquad a - (b - c) \neq d$$

Pensemos en un ejemplo que no cumpla la propiedad asociativa:

5 + 6 + 8 = 19	5 + (6 + 8) = 19	10 - 4 - 20 = -14	10 - (4 - 20) = 26
11 + 8 =	5 + 14 =	6 – 20 =	10 - (-16) =
19	19	-14	10 + 16 =
			26

Este último se llama **contra ejemplo**, ya que nos permite verificar que la propiedad no se cumple.

Conmutativa

$$a + b = c \qquad b + a = c$$

-8 + 3 = -5   +3 - 8 = -5

Cancelativa

11. Antes de analizar esta propiedad, completen el siguiente cuadro:

Número	Opuesto	Número + opuesto	Número - opuesto
8			
-15			
12			
A			
-a			

$$a + d - a = d$$

Podemos cancelar "a" y simplificamos el cálculo.

5 + 20 - 5 =	5 + 20 - 5 =
$\cancel{5}$ + 20 - $\cancel{5}$	25 - $\cancel{5}$ =
20	20

Como la suma y la resta son operaciones contrarias se pueden cancelar, ya que al sumar los opuestos, el resultado es cero.

Elemento neutro

12. Calculen:

a. 6 + 0 =   b. -8 + 0 =   c. 0 - 6 =   d. 0 + 8 =

El cero es el elemento neutro en la suma y en la resta.

$$a + 0 = a \qquad 0 - a = -a$$

13. El siguiente es el balance del kiosco entre los meses de julio a diciembre.

Julio	Ganancia	$300
Agosto	Ganancia	$150
Septiembre	Pérdida	$10
Octubre	Pérdida	$35
Noviembre	Pérdida	$25
Diciembre	Ganancia	$10

El cálculo que representa esta situación es:

300 + 150 - 10 - 35 - 25 + 10

Vamos a resolverlo empleando diferentes caminos.

300 + 150 - 10 - 35 - 25 + 10 =

Iremos sumando o restando de izquierda a derecha.

450 - 10 - 35 - 25 + 10 =

440 - 35 - 25 + 10 =

405 - 25 + 10 =

380 + 10 =

= 390

Averiguaremos el total de ganancias y el total de pérdidas y se lo restamos.

300 + 150 - 10 - 35 - 25 + 10 =

(300 + 150 + 10) - (10 + 35 + 25) =

-70 =

= 390

Verificamos si hay números que se puedan cancelar, en nuestro caso, el +10 y -10.

300 + 150 - 10 - 35 - 25 + 10 =

300 + 150 - 35 - 25 =

450 - 35 - 25 =

415 - 25 =

= 390

14. Identifiquen y expliquen qué propiedades se aplicaron en cada caso.

a. ....

b. ....

15. Resuelvan las siguientes sumas algebraicas.

a. -10 + 5 + 6 + 9 - 8 + 2 - 4 =

b. 11 + 5 + 8 - 8 - 5 + 2 =

c. 45 - 8 + 8 + 7 + 6 - 2 =

d. -10 - 8 - 3 - 7 + 5 + 10 =

16 Para cada situación, planteen un cálculo y resuelvan.

a. Un ascensor sube cinco pisos, se detiene y luego continua hacia arriba cuatro más, para luego bajar ocho pisos, detenerse y ascender nuevamente dos. Si partió de planta baja, ¿en qué piso quedó?

b. Tiempo más tarde, el ascensor, que estaba en planta baja, desciende tres pisos, luego sube siete y, por último, baja cuatro, ¿en qué piso quedó?

c. Un día de julio la temperatura al amanecer era de 8 ºC, luego bajó 5 ºC, pero al mediodía ascendió 10 ºC, al atardecer se mantuvo, pero al anochecer bajó 15 ºC. ¿Cuál fue la temperatura al finalizar el día?

Podemos encontrarnos con sumas algebraicas que presentan paréntesis, en estos casos, es muy práctico suprimirlos y luego operar.

Si delante de un paréntesis hay un signo positivo (+), se suprime el paréntesis y quedan los signos de dentro (sin cambiar):

$$a + (-b + c) = a - b + c$$

Se suprime el paréntesis y el signo positivo que lo precede.

Pero si delante de un paréntesis hay un signo negativo (-), se lo suprime y se invierten los signos de adentro del paréntesis, ya que se transforma en la suma del opuesto:

$$a - (+b - c) = a - b + c$$

Ejemplo:

-8 + (-5) - (-3) + 6 + (+8 - 4) - (+5 - 9) =

-8 - 5 + 3 + 6 + 8 - 4 - 5 + 9 =

-5 + 3 + 6 - 4 - 5 + 9 =

-2 + 6 - 4 - 5 + 9 =

4 - 4 - 5 + 9 =

-5 + 9 =

4

17. Resuelvan las siguientes sumas algebraicas suprimiendo los paréntesis previamente.

a. -8 + (-8) + (+15 - 2) =

b. 6 + (-8) - (-15 + 2) =

c. -6 - (-8) + (-13 - 6) =

d. -15 - 17 + (+13 + 20 - 6) =

18. Resuelvan los cálculos anteriores, haciendo primero las operaciones de adentro de los paréntesis y luego suprimirlos. Por ejemplo:

4 + (-5 + 8) - 5 - (-3 + 2) =

4 + (+3) - 5 - (-1) =

4 + 3 - 5 + 1 =

7 - 5 + 1 =

2 + 1 =

3

¿Qué sucedió al resolver de esta manera?

Multiplicación y división de números enteros

19. Escribí qué cálculos podés ingresar en una calculadora en la que no funciona la tecla + para obtener los resultados de las siguientes cuentas.

a. $6+6+6+6+6+6+6+6+6+6$

b. Sumar 17 veces el número 32.

c. $(-7)+(-7)+(-7)+(-7)+(-7)$

d. Sumar 19 veces el número -3.

e. Sumar 9 veces el número -11.

f. $(-8)+(-8)+(-8)+(-8)+(-8)+(-8)$

20. Marcá con un mismo color las expresiones que sean equivalentes entre sí.

$-11-11-11-11-11$	$4\cdot(-1)$	$11\cdot(-4)$
-44	$-11+(-11)+(-11)+(-11)$	$-40+4$
$-4\cdot 1$	$-1-1-1-1$	-4
$-11\cdot 4$	$-4\cdot 10-4$	4

Cuando en una multiplicación algunos factores son números negativos, se los coloca entre paréntesis, a menos que el número negativo sea el primero de los factores.

21. Resolvé estas multiplicaciones.

a. $-8\cdot 1$

b. $-21\cdot 2$

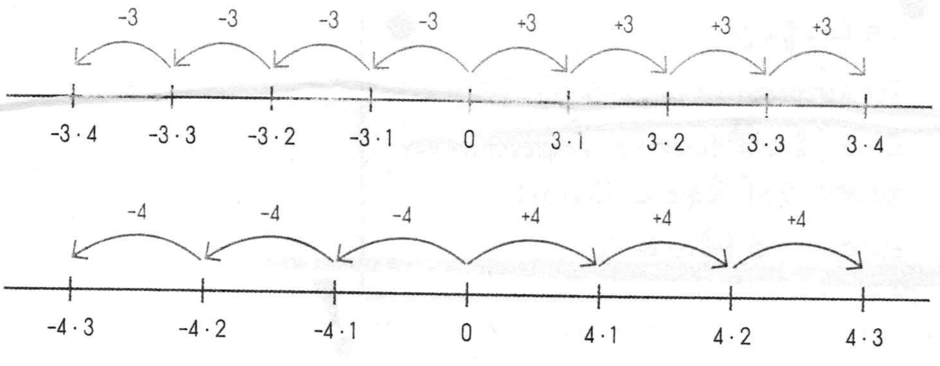
c. $3\cdot(-10)$

d. $33\cdot(-3)$

e. $-34\cdot 89$

f. $524\cdot(-1)$

Multiplicar un número positivo por otro negativo es como sumar sucesivamente el número negativo tantas veces como indica el número positivo. Por ejemplo, teniendo en cuenta que $3\cdot 4$ es como sumar 3 veces 4, o sumar 4 veces 3, se puede pensar que $-3\cdot 4$ y $3\cdot(-4)$ dan como resultado el opuesto de $3\cdot 4$.



Si se multiplica a un número positivo por -1, se obtiene el opuesto del número. Por ejemplo, $(-1)\cdot 8=-8$.

Si se multiplica un número positivo por uno negativo, el resultado es el mismo que si se multiplicaran los opuestos de ambos números. Por ejemplo, $7\cdot(-8)=-8\cdot 7$.

22. Si es posible, hallá, en cada caso, un número entero que cumpla lo pedido.

a. Al multiplicarlo por 3 da -18.

b. Al multiplicarlo por -3 da -18.

c. Al multiplicarlo por -3 da -19.

d. Al multiplicarlo por 5 da -5.

e. Al multiplicarlo por -8 da -4.

f. Al multiplicarlo por -5 da 10.

La multiplicación de los números enteros tienen las mismas propiedades que la multiplicación de los números naturales.

- Si, en una multiplicación, los números se agrupan de alguna manera o se descomponen en factores, el resultado no cambia. Esto se denomina **propiedad asociativa de la multiplicación**. Por ejemplo, $-1 \cdot 4 \cdot 15 = -4 \cdot 15 = 15 \cdot (-4) = 15 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1)$.
- Otra propiedad de la multiplicación es la **propiedad conmutativa**, que afirma que si se cambia el orden de los números que se multiplican, el resultado no cambia. Por ejemplo, $-4 \cdot 15 = 15 \cdot (-4)$.
- En el conjunto de los números enteros también se cumple la **propiedad distributiva** que dice que para multiplicar un número entero por una suma se puede multiplicar cada sumando por ese número y luego sumar los resultados. Por ejemplo: $-53 \cdot 12 = -53 \cdot (10 + 2) = -53 \cdot 10 + (-53) \cdot 2 = -530 + (-106) = -636$. También se cumple si se multiplica un número entero por una resta.

El cero en la multiplicación recibe el nombre de elemento **absorbente**. Cualquier número multiplicado por cero (0) da como resultado cero (0).

$$a \cdot 0 = 0$$

Esta propiedad también se cumple en el conjunto de los números enteros.

El uno (1) en la multiplicación recibe el nombre de elemento **neutro**, ya que cualquier número multiplicado por uno (1), da el mismo número que se multiplica.

$$a \cdot 1 = a$$

Esta propiedad también se cumple en los números enteros. Por lo tanto, multiplicar por uno (1) a un número negativo, da por resultado el mismo número negativo que multiplicamos.

$$-a \cdot 1 = -a$$

VOCABULARIO

Neutro: no toma posición por ninguna de las partes. Su presencia no modifica al elemento.

Gracias a la propiedad distributiva de la muliplicación respecto de la suma de números enteros, **si se multiplica un número negativo por −1, el resultado es el opuesto de ese número negativo**. El razonamiento de Antonia de la actividad 17 ayuda a justificarlo. Por ejemplo, para calcular $-34 \cdot (-1)$, se puede pensar que $-34 \cdot (-1 + 1) = 0$, y por la distributiva: $-34 \cdot (-1) + (-34) \cdot 1 = 0$, es decir que $-34 \cdot (-1) + (-34) = 0$. Y, como −34 y el resultado de $(-34) \cdot (-1)$ son opuestos, entonces $(-34) \cdot (-1) = 34$.

En resumen...

Si los signos de los factores son distintos, el signo del producto es ....

Si los signos de los factores son iguales, el signo del producto es ....

En símbolos:

(+) . (+) = (+)

(-) . (+) = (-)

(+) . (-) = (-)

(-) . (-) = (+)

La regla de los signos que aprendimos también se emplea para la división.

23 Resuelvan las siguientes operaciones, cuando sea posible.

a. -4 . 7 =
b. 6 . (-8) =
c. 15 : (-3) =
d. -18 : (-6) =
e. -11 . (-2) =
f. -71 . (-1) =
g. 142 : (-1) =
h. 15 : 0 =
i. 9 . 0 =
j. -9 . 0 =
k. -25 : (-5) =
l. -12 . 3 =

24 Unan con flechas cada cálculo con su respuesta.

a. 125 . 3 =	1	-375
b. 63 : (-3) =	144	21
c. -12 . 12 =	-21	-1
d. -42 : (-42) =	-144	375

25 Dar los posibles valores de a, b, c y d para que el resultado sea el pedido.

a. a . b = 40
b. c : d = 33

26 En cada caso encontrá, si es posible, un número entero que cumpla lo pedido.

a. Al multiplicarlo por 6 da –42.
b. Al multiplicarlo por –6 da 42.

27 Para cada caso, encontrá, si es posible, tres pares de números enteros que al multiplicarlos se obtenga el número dado.

a. –24
b. 40
c. 7

28 Resolvé estas cuentas.

a. 8 : (–4)
b. –10 : (–2)
c. 4 : (–4)
d. 45 : (–1)
e. –32 : (–1)
f. 4 : 0
g. 0 : (–3)
h. 0 : 0

29 a. ¿Qué número multiplicado por –9 da por resultado 126?

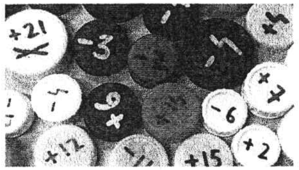
b. ¿Por qué número hay que dividir a –420 para obtener por resultado 12?

Encontrar el número que multiplicado por –9 da 126 es resolver la ecuación $-9 \cdot a = 126$, es decir, encontrar el valor de la variable a que hace verdadera esa igualdad. En este caso el valor de a es 126 : (–9).

30 Resolvé estas ecuaciones en las que la variable representa un número entero.

a. $8 \cdot x = -376$
b. $3 \cdot (-a) = -49$
c. $p : (-17) = 9$
d. $-27 : z = -3$
e. $-29 \cdot x = 0$
f. $0 \cdot c = -11$
g. $b \cdot (-17) = 340$
h. $-440 : p = -11$

Cada alumno deberá traer tapitas de botellas, y al azar escribir cinco números positivos, cinco negativos y las cuatro operaciones.



Luego, juntará sus tapitas con la de sus compañeros separando un sector de números y otro de operaciones, las pondrán boca abajo para que no se vean los números escritos.

De a uno por vez tendrán que dar vuelta dos tapitas del sector de números y una del sector de operaciones.

De ser posible harán el cálculo, escribiéndolo en sus carpetas, de no ser posible, explicarán qué propiedad es la que no se está cumpliendo .Todos los alumnos llevarán el registro de las operaciones de sus compañeros.

Al concluir cinco vueltas, se sumarán los resultados obtenidos, el jugador con mayor puntaje será el ganador.

Cálculos combinados

Si a las sumas algebraicas le agregamos la multiplicación y la división, estamos en presencia de un **cálculo combinado**.

Juguemos nuevamente con las tapitas, pero ahora cada participante tiene que sacar cinco tapitas y cuatro operaciones.

Imaginemos que, en una primera ronda, un jugador saca los siguientes números y operaciones en el orden en el que aparecen:

Números: +2, -11, +18, +21, -7 Operaciones: (.), (-), (+), (:)

El cálculo sería el siguiente:

+2 . (-11) - (+18) + (+21) : (-7) =

Es importante recordar que al igual que en el conjunto de los números naturales hay un orden para resolver y una prioridad en las operaciones (jerarquía de las operaciones):

1. Separar en términos. Los términos son las operaciones que quedan determinadas entre los (+) y (-). En este caso, los signos de suma y resta separan los siguientes términos: 4 . 3 + 5 -15 : 3.

2. Si hubiera paréntesis, dentro de ellos también se separa en términos.

3. Hacer las multiplicaciones y divisiones.

4. Hacer las sumas y restas de izquierda a derecha.

+2 . (-11) - (+18) + (+21) : (-7) =

-22 -18 + (-3) =

-40 - 3 =

-43

¡A PENSAR!

31. Resuelvan los siguientes cálculos combinados:

a. (-11) + 42 : (-21) + (-11) . 4 =

b. (7 . 4 + 14) : (-7) - (-12) : 3 + 8 =

c. (18 - 3 . 5) : (-3) + 63 : (-9) =

d. -3 + (-75) . 2 : (-5) + 4 =

32. Cada uno de los siguientes cálculos tiene uno o varios errores, encuéntrenlos, expliquen cuáles son y luego, resuelvan de forma correcta.

a. 25 + (-3) . (-8) - (5 - 42 : 3) + (+11) . (-2) =

22 . (-8) - (5 - 14) + 22 =

-176 - 8 - 9 + 22 =

-171

b. -28 : (-7) . (-3) - (-30 + 70) : (-4) + 18 =

-4 . (-3) - (+40) : (-4) + 18 =

12 - 10 + 18 =

20

33. Completen los espacios vacíos de forma que den el resultado indicado.

a. -3 + (-5 . …) + 11 = -2 b. 16 - (-5 . 3 + 4) - … = 30 c. (-4 . 5) + (8 . …) = -20

{[( )]}

En algunos casos, es necesario utilizar otros símbolos aparte de los paréntesis, esto ocurre cuando hay varias operaciones. En estos casos, se utilizan los corchetes [ ] y las llaves { }. Por ejemplo:

4 . [-5 + (-8)] =

No sería correcto escribir 4 . (-5 + (-8)) ya que podríamos confundirnos y no saber dónde concluye cada paréntesis.

El orden correcto de resolución es: paréntesis, corchetes y llaves.

Ejemplo:

5 - {-5 + 4 . [18 : (-3 . 2) + 1] - 4} =

5 - {-5 + 4 . [18 : (-6) + 1] - 4} =

5 - {-5 + 4 . [-3 + 1] - 4} =

5 - {-5 + 4 . [-2] - 4} =

5 - {-5 - 8 - 4} =

5 - {-17} =

5 + 17 =

22

34. Resuelvan los siguientes cálculos:

a. -5 : (-8 + 3) + [-4 + (-6 + 5 . 3) : (-3)] =

b. -12 : (-3 + 6) + {4 . (-2) : (-1) - [-100 : (-10)]} =

c. 5 - {125 : (-25) . (-3) + 4 . [64 : (-8) + 11} =

d. 121 : 11 - 2 . {400 : 100 + [2 . (-2 + 120) + 4] - 141} =

e. -{-[-(18 : 3)] - 6} =

35. Unan los cálculos con el resultado correcto.

a. -{-[-(-1)]} =	1
b. {-(-1) . (-1) . [1 . (-1)]} =	-1
c. (-1) . {-1 . [-1 . 1]} =	

Potencia y radicación

36. Completen:

Producto de factores	Potencia a^n	Resultado
3 . 3 . 3 . 3		81
5 . 5 . 5		
	$(-2)^3$	
(-2) . (-2) . (-2) . (-2)		
		-125
		100
	$(-6)^2$	

Potencia

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces}}$ a es la base y ^{n} el exponente

a es un número entero (a ε z)

$n \geq 0$

$a^0 = 1$ si $a \neq 0$

Analicemos las respuestas del cuadro anterior, si $a > 0$ el resultado tendrá signo ... independientemente de la potencia a la que elevamos, pero si $a < 0$ el signo del resultado cambia.

Si la potencia es par, como multiplicamos una cantidad par de veces el número y el signo negativo, entonces el resultado es ...

En cambio, si el exponente es impar el resultado será ...

Para $a > 0$

a^{par} = positivo a^{impar} = positivo

En cambio, para $a < 0$

a^{par} = positivo a^{impar} = negativo

Otra forma de pensarlo:

$(-2)^4$ =	$(-2)^5$ =
(-2) . (-2) . (-2) . (-2) =	(-2) . (-2) . (-2) . (-2) . (-2) =
+4 . (-2) . (-2) =	+4 . (-2) . (-2) . (-2) =
-8 . (-2) =	-8 . (-2) . (-2) =
+16	+16 . (-2) =
	-32

37. Resuelvan las siguientes potencias:

a. $(-1)^1$ =   c. $(-1)^3$ =   e. $(-1)^{15}$ =

b. $(-1)^2$ =   d. $(-1)^4$ =   f. $(-1)^{40}$ =

Radicación

$\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

donde **n** es el **índice**

a es el **radicando**

b es la **raíz**

$\sqrt[3]{8} = 2$	porque	$2^3 = 8$
$\sqrt[3]{-8} = -2$	porque	$(-2)^3 = -8$
$\sqrt[2]{4} = 2$	porque	$2^2 = 4$

$\sqrt{-4}$ = Ø no tiene solución en enteros ya que no hay ningún número (de los que conocen hasta ahora) que elevado al cuadrado de -4.

$\sqrt[Par]{\text{Negativo}}$ = Ø no tiene solución en enteros

20

Las propiedades ya se trabajaron con los números naturales, pero se repasarán nuevamente.

- Potencia
  - Producto de potencias de igual base

$$a^n . a^b = a^{n+b}$$

  - Cocientes de potencias de igual base

$$a^n : a^b = a^{n-b}$$

  - Potencia de otra potencia

$$(a^n)^b = a^{n.b}$$

  - Distributiva de la potencia en la multiplicación o división

$$(a . b)^n = a^n . b^n$$

  - Distributiva de la potencia en la suma o resta

$$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$$

No se puede aplicar. La potencia no es distributiva respecto de la suma y la resta.

- Radicación
  - Raíces consecutivas

$$\sqrt[n]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[n.b]{a}$$

  - Distributiva de la raíz en la multiplicación o división

$$\sqrt[n]{a . b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$$

  - Distributiva de la raíz en la suma o resta

$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

No se puede aplicar. La radicación no es distributiva respecto de la suma y resta.

38. Comprueben las siguientes propiedades:

a. $(-3)^2 . (-3)^5 =$

$(-3) . (-3) . (-3) . (-3) . (-3) . (-3) . (-3) =$

$(-3)^7$

b. $(-2)^5 : (-2)^3 =$

$$\frac{\cancel{(-2) . (-2) . (-2)} . (-2) . (-2)}{\cancel{(-2) . (-2) . (-2)}} =$$

$(-2)^{...}$

c. $((-4)^2)^3 =$

$(-4)^2 . (-4)^2 . (-4)^2 =$

$\underbrace{(-4) . (-4) . (-4) . (-4) . (-4) . (-4)}_{(-4)^{...}} =$

PARA SABER MÁS

Recordemos que la línea de fracción es una división.

39. Resuelvan las potencias y raíces:

a. $(-4)^2 =$
b. $(-4)^3 =$
c. $(-2)^2 =$
d. $-2^2 =$
e. $\sqrt[5]{-32} =$
f. $\sqrt[3]{-1000} =$
g. $\sqrt[4]{16} =$
h. $\sqrt{100} =$
i. $(-1)^{10} =$
j. $-1^{10} =$
k. $1^{10} =$
l. $(-1)^6 =$

40. Resuelvan aplicando propiedades cuando sea posible.

a. $(-2)^8 . (-2)^2 : [(-2)^4]^2 =$

b. $-6 . (-6)^4 : (-6)^5 =$

c. $4 . \sqrt{25} + (-3) =$

d. $(-1) . \sqrt[3]{(-8)} + 12 : (-1) =$

e. $\sqrt[3]{(-1)} + 4 . (3^2 - 4^2) + (8 - 6) : (-2) =$

f. $4 . (-2) + (-1) + 20 : (-2) =$

g. $\sqrt{2} . \sqrt{8} =$

h. $\sqrt{\sqrt{16}} + \sqrt{-1} . \sqrt{-25} =$

i. $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

PARA SABER MÁS

En los cálculos combinados con potencia y raíz, se resuelven primero las potencias y raíces, luego las multiplicaciones y divisiones, y por último, las sumas y restas.

41. Completen:

a	b	a^3	a^2	$a^3 - b^2$	-a	$(-a . b)^2$
3	-2					
	3				4	
-1						49

INTEGRANDO LAS TIC

Para repasar lo visto hasta ahora, busquen "Las aventuras de Troncho y Poncho: potencias" en YouTube.

ACTIVIDADES INTEGRADORAS

42. Ordenen los años de nacimiento de los siguientes matemáticos. Expliquen el criterio usado.

a. Cantor 1845
b. Aristóteles 384 a. C.
c. Arquímedes 287 a. C.
d. Copérnico 1473
e. Coulomb 1736
f. Euclides 300 a. C.

43. Indiquen el signo del resultado de las siguientes operaciones:

Operación	Positivo	Negativo
-1548 + 32		
-548 . (-854)		
$(-54)^{10}$		
$\sqrt[3]{64}$		
$(-3)^{7}$		
$\sqrt[3]{-27}$		

44. Resolvé las siguientes cuentas.

a. −32 + 15 − 45 + 81 + 34 − 15 + 45 − 81 − 34 = ...

b. −21 − 42 − 37 + 78 + 45 − 12 = ...

c. 67 + 1.548 − 32 − 1.548 + 19 − 45 = ...

45. Respondan:

a. ¿Cuál es el opuesto de -45?
b. ¿Qué números tienen por módulo 11?
c. ¿Cuál es el anterior de -127?
d. ¿Cuál es el posterior de -1?

46 Resolvé estas cuentas.

a. 6 − (−9) = ...
b. 14 − 28 = ...
c. −5 + (−6) = ...
d. −11 + 8 = ...
e. −67 − 120 = ...
f. −473 + (−230) = ...
g. −100 − (−25) = ...
h. −3 · 8 = ...
i. 408 + (−18) = ...
j. −25 · (−2) = ...
k. 14 · (−10) = ...
l. 275 · (−1) = ...
m. −34 · (−99) = ...
n. −574 · (−1) = ...
ñ. 35 : (−7) = ...
o. 125 : (−5) = ...
p. 0 : (−7) = ...
q. (−5) : 0 = ...

47 Resolvé estos cálculos.

a. 5 − 3 + (−2) − (−5)
b. −6 + (−5) − 7 − (−9 + 11)
c. 12 − (−15 + 7) + (−1 − 3 + 4)
d. −2 + 5 + (−6) + (−4) + 7
e. −2 − (−4) + (−6) + 8
f. 24 : (−4) + (−9) · (−2) − (−3)
g. −16 : 8 + (−14) : 7 − (−4) · (−6) · 2
h. 12 · (−7) + 14 · (−5) − 32 : (−8)
i. 125 : (−25) − [−31 + (−52) + 60]
j. $(-1)^{35} \cdot (-2)^{4}$
k. $-400 : (-5)^{2} + (-3) \cdot (-4) - (-2)^{3}$
l. $(-3)^{3} + (-91 + 86)^{3}$

48 Una persona nació en el año 7 a. C., se casó en el año 20 d. C. y tuvo su primer hijo cuatro años después. Cuando nació su segundo hijo, el primero cumplía nueve años.

a. ¿Qué edad tenía cuando se casó?

b. ¿Qué edad tenía cuando nació su primer hijo?

c. ¿Cuántos años tenía al nacer su segundo hijo?

49. Completen la siguiente pirámide, teniendo en cuenta que el número de cada casilla es la suma de los dos números de las casillas inferiores.

-33	-57				
		-35			
	-48		-9		
113	-76		-2	+11	
	-29				

50. La temperatura del aire baja según se asciende en la atmósfera a razón de 9 ºC cada 300 metros. ¿A qué altura vuela un avión si la temperatura del aire ha variado -81 ºC?

51. Un repartidor de pizzas gana \$360 por día y gasta, un promedio de \$5 en gasoil y \$10 en reparaciones de la moto. Si además recibe \$100 de propina,

a. ¿Cuánto ahorra diariamente?

b. ¿Cuánto tiene de gastos al cabo de un mes?

52. Completen:

a. $\sqrt{\dots} = -3$

b. $\dots^2 = 25$

c. $\dots^3 = 8$

d. $\sqrt{} = 16$

e. $\sqrt[\dots]{81} = 3$

f. $-2^{\dots} = -32$

g. $7^{\dots} = 1$

h. $(\dots 4)^3 = -64$

53. Resuelvan los siguientes cálculos:

a. $(-45 + 11) : 17 - (-2)^4 + 16 : (-4) =$

b. $\sqrt[3]{-8} \,.\, 5 + [4 - (-5 \,.\, 4) : 2] =$

c. $5 + 8 \,.\, (-3) - \{5 : [1 \,.\, (-145)^0 : (-1)\} =$

d. $(-2)^{15} : ((-2)^7)^2 + \sqrt[4]{8} \,.\, \sqrt[4]{2} =$

e. $18 \,.\, (-3) : (-6) - \sqrt[3]{-27} + (-7)^2 : (-1)^3 =$

f. $15 + (-11) : (-1) - 125 : (-5) + [32 - 321 : (-3)]^0 =$

54. Completen, para que el cálculo dé lo pedido:

a. $(5^{\dots})^2 : 5^5 = 5$

b. $(-2)^3 \,.\, (-2)^4 : (-2)^{\dots} = 1$

c. $8 \,.\, 8^5 \,.\, 8^3 : (8^2 \,.\, 8^{\dots}) = 8^2$

d. $[(-15)^3 \,.\, (-15) \,.\, (-15)] \,.\, (-15)^{\dots} = (-15)^3$

55 En cada caso, completá con >, < o = sin hacer las cuentas. Explicá cómo lo resolviste.

a. $(-11) \cdot (-8) \cdot (-9)$ .... $(-11) \cdot 8 \cdot 9$

b. $(-1) \cdot (-78.423)$ 78.423

c. $(-31)^4$ .... 31^4

d. 1 .... $(-6)^8$

e. 68^9 .... $(-68)^9$

f. $(-3)^5$ 0

Recordamos lo aprendido

Una ecuación es una igualdad en la que hay por lo menos un valor desconocido. Resolverla, implica encontrar todos los valores posibles de la incógnita que hagan la igualdad verdadera. Para resolver ecuaciones con números enteros, se aplican las mismas propiedades que fueron usadas en el conjunto de los naturales.

Miembros

$$2x + 11 = x - 3$$

Términos

$$2x + 11 = x - 3$$

A continuación, resolvemos la misma ecuación por dos caminos, que si bien parecen diferentes llevan al mismo resultado.

$-8x + 2 = 10$ $-8x + 2 - 2 = 10 - 2$	**Restamos miembro a miembro -2**	$-8x + 2 = 10$ $-8x = 10 - 2$	**Pasamos restando el que suma**
$-8x : (-8) = 8 : (-8)$ $-8x : (-8) = -1$ $x = -1$	**Dividimos ambos miembros por -8**	$x = 8 : (-8)$ $x = -1$	**Pasamos dividiendo el que multiplica**

Es muy importante saber que en matemática las cosas no "pasan" porque sí. Como verán, aplicamos las propiedades de los números enteros, de forma explícita, mientras que a la derecha ahorramos pasos, pero también aplicamos las propiedades. "Al pasar" de miembro, en realidad, estamos aplicando la **propiedad cancelativa**. Por eso, tenemos la idea de que desaparecen de un miembro y aparecen en el otro con el signo cambiado.

Otra forma sería pensar las ecuaciones como un acertijo, que para descubrirlo hay que recorrerlo de forma inversa.

$-8x + 2 = 10$ — A la incógnita primero la multiplico por -8. Luego, le sumo 2 y eso da por resultado 10

Vamos a hacer el camino inverso:

$-8x = 10 - 2$ — Al 10 le restaremos los 2 que sumamos

$x = 8 : (-8)$ — y ahora a ese resultado lo dividiremos por -8.

$x = -1$ — De esta forma, obtenemos -1 que era el valor del que partimos.

Verificar el resultado de una ecuación es comprobar que el valor de la incógnita (x) que hallamos hace verdadera la igualdad.

En nuestro caso, si decimos que $x = -1$

$-8x + 2 = 10$ Remplazamos la incógnita por el valor hallado

$-8 . (-1) + 2 = 10$

$8 + 2 = 10$

$10 = 10$

Queda demostrada nuestra igualdad.

¿Pero si decíamos que el valor de x era 2?

$-8 . 2 + 2 = 10$

$-16 + 2 = 10$

$-14 \neq 10$

Vemos que llegamos a una contradicción esto surgió de pensar que 2 era la solución de la ecuación.

PARA SABER MÁS

Símbolo	Se lee
/	Tal que
ε	Pertenece
$\not\in$	No pertenece
$\wedge$	y
$\vee$	o
$=$	Igual que
$\neq$	Distinto que
$>$	Mayor que
$<$	Menor que
$\leq$	Menor o igual que
$\geq$	Mayor o igual que

1. Matías le pide a Federico que piense un número, luego que lo multiplique por 2 y le sume 100, al resultado obtenido lo divida por 5 y le reste 50. Al concluir, le pregunta qué número obtuvo y Federico responde -8. Rápidamente, Matías le dice que había pensado en 55.

a. ¿Cómo hizo Matías para obtener ese número?

b. Escriban en sus carpetas el cálculo que hizo Federico y el que llevó a Matías al resultado correcto.

c. Comparen los resultados y extraigan conclusiones.

INTEGRANDO LAS TIC

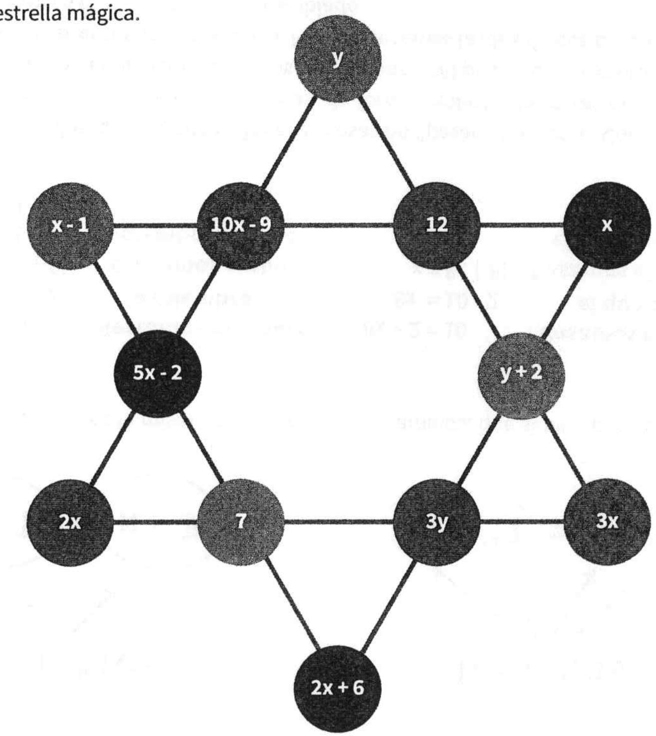
Para repasar lo aprendido, jueguen a "Del lenguaje escrito al lenguaje algebraico" en el portal de Educar.

Ecuaciones en enteros

¡A JUGAR!

Estrella mágica de seis puntas

La siguiente es una estrella de seis puntas. Como esta estrella es mágica, al sumar entre sí los cuatro círculos que están en línea dan lo mismo. Los números de las casillas de la estrella original han sido escondidos y sustituidos por expresiones donde aparecen dos letras, x e y. Tienen que encontrar los valores de estas letras para poder volver a colocar esos números. Observen que hay dos líneas, donde solo aparece la incógnita x. Al igualarlas, obtendrán una ecuación en función de x que podrán resolver. Cuando tengan el valor de x, sustitúyanlo en las casillas correspondientes y obtengan los números que estaban escondidos. De la misma forma, deberán encontrar el valor de la incógnita y. Cuando tengan todos los valores numéricos de las casillas, podrán comprobar que efectivamente se trata de una estrella mágica.



¡A PENSAR!

2. Calculen el valor del número desconocido en cada caso y verifiquen la solución.

a. $-2 . x + 7 = 5$

b. $6 . x : (-3) = 4$

c. $15 - 3 + x = 10$

d. $3 . x = (-3)^2 - 3 . 5$

e. $5 . x - 8 = 2 . x - 11$

f. $5 . x + 2 . 11 = 2^3 . 5 : (-5)$

¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación?

$3 . x + 2 = 8$ $3 . x = 8 - 2$ $3 . x = 6$ $x = 6 : 3$ $x = 2$ En este caso, obtenemos una única solución. Esto quiere decir que solo el 2 verifica la igualdad: **S = {2}**	$x^2 + 7 = 32$ $x^2 = 32 - 7$ $x^2 = 25$ $x = \sqrt{25}$ $x = 5$ y $x = -5$ En este caso, obtenemos dos soluciones ya que tanto el 5 como el -5 verifican la igualdad: **S = {5; -5}**
$3 . x + 2 - x - 2 . x = 5$ $3 . x - x - 2 . x = 5 + 2$ $0 . x = 7$ $0 = 7$ Esto es un absurdo. Ocurre en las ecuaciones que no tienen solución. No hay ningún número que verifique la igualdad: **S = Ø**	$5 . x + 3 - 5 . x = 3$ $5 . x - 5 . x = 3 - 3$ $0 . x = 0$ $0 = 0$ En este caso, la ecuación tiene infinitas soluciones. Esto implica que cualquier valor que le demos a la incógnita verifica la igualdad: **S = z**

$\sqrt[n]{x^n} = |x|$ si n es par $\qquad$ $\sqrt[n]{x^n} = x$ si n es impar

Ejemplo:

$x^2 = 49$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$

$|x| = 7$ $\quad$ por que $7^2 = 49$ y $(-7)^2 = 49$

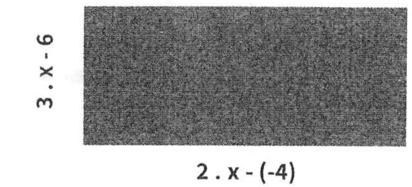
$x^3 = 27$

$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{27}$

$x = 3$ $\quad$ por que $3^3 = 27$

3. Planteen la ecuación y resuelvan.

a. El perímetro de un rectángulo es de 36 cm. Calculen la medida de sus lados.



b. El triple de la diferencia entre un número y 8 es el opuesto de 9. ¿Cuál es el número?

c. El doble de un número es igual a la suma de su siguiente y su anterior. ¿Cuál es el número?

d. La suma entre un número y su anterior da por resultado 37. ¿De qué número hablamos?

e. El triple del anterior de un número da por resultado el opuesto de 69. ¿Cuál es el número?

f. El anterior del cuadrado de un número es igual al producto de su anterior y su siguiente. ¿De qué número hablamos?

4. Unir con flechas cada ecuación con su resultado.

a. $\sqrt[4]{x} = 2$	$x = 4$
b. $\sqrt[3]{x} = 4$	$x = -2$
c. $x^4 = 16$	$x = 3$
d. $x^5 = -32$	$x = 2$
e. $x^2 = 1$	$x = -4$
f. $x^5 = 1$	$x = 16$
g. $\sqrt[4]{x} = -1$	$x = -1$
h. $\sqrt{x} = 1$	$x = -3$
i. $\sqrt[3]{x} = -1$	$x = 1$

PARA SABER MÁS

Para recordar:

- Siempre entre un número y una letra si no hay ningún signo, es porque hay una multiplicación.
- Diferencia = resta
- Producto = multiplicación
- Cociente = división
- Doble, triple, cuádruplo. Se multiplica por 2, 3 o 4.
- Mitad, tercera parte, cuarta parte. Se divide por 2, 3, o 4.

Es muy útil recordar que: **x : 2**.

También, se puede expresar como $x \cdot \frac{1}{2}$ o $\frac{1}{2} \cdot x$

Lo pueden encontrar también como $\frac{x}{2}$

5. Apliquen las propiedades y resuelvan para calcular el valor de x.

a. $x \cdot x^2 \cdot x = 16$

b. $x^7 : x^5 = 169$

c. $x^4 : x = -27$

d. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{x}} = 64$

e. $\sqrt[6]{x^2} \cdot x = 49$

f. $x^{3^2} : x^4 = 36$

6. Calculen el valor desconocido.

a. $6 \cdot x + 30 - 5x = -60$

b. $x - 44 - 3x = -10 + 6$

c. $5x - 15 = 4x + 16$

d. $-3x + 9 = -3 + 2x - 4 \cdot 2$

e. $-x - \sqrt{9} - 5x = -27$

f. $2x - 6 = 3x - 36 + x$

g. $x - 8x - 4 + 7 = -2 \cdot (-9) + 3x + 5$

h. $3 \cdot (x^3 - 1) = -27$

i. $2 \cdot \sqrt[3]{x + 2} = -4$

j. $4x^2 - 7 = 29$

k. $\sqrt[4]{5x + 1} = 2$

l. $3 - 2^x = -5$

m. $\sqrt[3]{1 - 3x} = -2$

n. $(2 \cdot x + 4)^2 = 16$

7. Expliquen por qué son correctas las siguientes igualdades.

a. $x \cdot 2 = 2 \cdot x$

b. $\frac{1}{3} x = x : 3$

Propiedad distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Como la multiplicación es conmutativa, la propiedad distributiva en la multiplicación se puede aplicar tanto a la izquierda como a la derecha. Esto no ocurre en la división donde solo se puede aplicar a la derecha.

$$(b + c) : a = b : a + c : a \qquad (b - c) : a = b : a - c : a$$

8. Completen los espacios para que las igualdades sean verdaderas.

a. $5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 4 + \ldots \cdot 3$

b. $(6 - 8) \cdot 7 = 6 \cdot \ldots - 8 \cdot \ldots$

c. $-3 \cdot (5 - \ldots) = -3 \cdot 5 - (-3) \cdot 6$

d. $-2 \cdot (-2 - 6) = -2 \cdot (-2) - \ldots \cdot \ldots$

9. Calculen el valor de x:

a. $5(x - 3) = 4(x + 4)$

b. $3(3 - x) + 9 = 2(x - 4) + 6$

c. $-3(x - 1) + 4 = 6(x - 1) - 5$

d. $(4 + x)3 = (x + 4)5 + 1 - 3x$

10. Resuelvan los siguientes ejercicios planteando previamente las ecuaciones correspondientes:

a. El triple de la suma de dos números consecutivos es igual a 45. ¿Cuáles son los números?

b. Dentro de 20 años, Raquel tendrá la mitad de la edad de su abuela que actualmente tiene 90 años. ¿Cuál es la edad actual de Raquel?

c. La suma de tres números pares consecutivos es 42. ¿Cuáles son esos números?

d. La suma de tres números impares consecutivos es 39. ¿Cuáles son esos números?

11. Todo cambia por una coma. En cada enunciado, falta una coma. Escríbanla en el lugar correcto, para que sea verdadera la afirmación.

a. El doble de 10 más 5 es 25.

b. El doble de 10 más 5 es 30.

c. La tercera parte de 18 aumentado en 3 es 9.

d. La tercera parte de 18 aumentado en 3 es 7.

12. El orden en el que decimos las cosas también modifica el resultado. Planteen los siguientes enunciados.

a. El doble de la suma de un número y 10.

b. La suma entre el doble de un número y 10.

c. El cuadrado de la diferencia entre un número y 15.

d. La diferencia del cuadrado de un número y 15.

e. La raíz cúbica del siguiente de un número.

f. El siguiente de la raíz cúbica de un número.

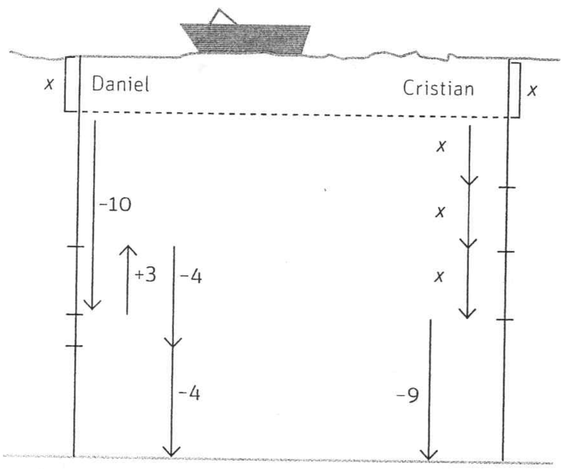
Modelizar situaciones con números enteros

Algunas situaciones de la realidad se modelizan con expresiones algebraicas en las cuales las incógnitas son números enteros, es decir que, además de los números naturales, sus soluciones pueden ser números enteros negativos.

Consideremos la siguiente situación:

Daniel y Cristian son dos buzos. Descienden y nadan juntos un rato, pero en un determinado momento de su exploración se separan. Daniel desciende 10 m hasta una plataforma submarina, luego asciende 3 m para observar un cardumen de peces de colores que pasaba y, finalmente, desciende dos tramos de 4 m hasta llegar al lecho del mar. Allí se encuentra con Cristian, que, en el momento en que se separaron observó en su instrumental la distancia a la que estaba desde la superficie, descendió esa misma distancia 3 veces y finalmente bajó 9 m más hasta tocar el fondo. ¿A qué profundidad estaban los dos buzos cuando se separaron?

Para comenzar a modelizar la situación podemos hacer una **figura de análisis** para volcar los **datos** del problema y decidir cuál es la **incógnita** y qué es lo que sabemos de ella.



Al separarse, Daniel y Cristian están a una profundidad que no sabemos y llamaremos x. Como es una profundidad y no una altura, decidimos que es un número negativo.

La profundidad de Daniel al llegar al fondo es: $x - 10 + 3 - 4 - 4$.

La profundidad de Cristian al llegar al fondo es: $x + x + x + x - 9$.

Cuando llegan al fondo, los dos están a la misma profundidad, por lo tanto, esas dos expresiones algebraicas que escribimos deben ser iguales. Las igualamos, entonces:

$$x - 10 + 3 - 4 - 4 = x + x + x + x - 9$$

Resolver la ecuación anterior nos llevará a conocer el valor de x, que es lo que se pregunta: la profundidad a la que se hallaban los dos buzos al separarse.

Al resolverla como estudiamos en la unidad 1, se obtiene: $x = -2$. Así resulta que la profundidad a la que estaban los buzos cuando se separaron es -2 metros.

Actividades

1. Se igualaron dos expresiones algebraicas. ¿Qué significa esa igualdad en el contexto?
2. ¿Por qué en la expresión de Cristian las x se suman en vez de restarse, si él está descendiendo?
3. Resolvé la ecuación, indicando qué hacés en cada paso y qué propiedades usás.
4. Julio tenía una deuda en un comercio del barrio. A comienzo de semana, paga $300, pero luego se endeuda con $200 más. Su hermano Lucas se asombra al ver que él debía el triple que su hermano y al pagar 4 cuotas de $300, se quedó debiendo lo mismo que Julio. ¿Cuál fue la deuda inicial de Julio? ¿Y la de Lucas? ¿Cuánto se quedaron debiendo al final? Planteá una ecuación y resolvela para responder las preguntas.

Nombre y apellido: .... Curso: ....

Inecuaciones

Teoría

Una inecuación es una desigualdad en donde hay por lo menos un valor desconocido. Las inecuaciones se resuelven como las ecuaciones, salvo en el caso en que se multiplique o divida por un número negativo. En dicho caso cambia el sentido de la desigualdad.

a)
$2x + 1 \leq 7$
$2x \leq 7 - 1$
$x \leq 6 : 2$
$x \leq 3$

b)
$(x - 3) : 2 > 5$
$x - 3 > 5 . 2$
$x > 10 + 3$
$x > 13$

c)
$3 - 4x < 15$
$-4x < 15 - 3$
$x > 12 : (-4)$
$x > -3$

d)
$(x + 7) : (-2) \geq -6$
$x + 7 \leq -6 . (-2)$
$x \leq 12 - 7$
$x \leq 5$

13 Tachar los números que no verifican las siguientes inecuaciones.

a) $x < -5$ → $x = 0$, $x = -7$, $x = -5$, $x = 1$, $x = -10$, $x = -4$, $x = -6$

b) $3 \geq x$ → $x = 2$, $x = 3$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -3$, $x = 4$, $x = -2$

c) $x > -6$ → $x = 1$, $x = -6$, $x = -5$, $x = -7$, $x = 12$, $x = -1$, $x = 0$

d) $2 < x$ → $x = -2$, $x = 2$, $x = 0$, $x = 7$, $x = 3$, $x = 1$, $x = -1$

e) $-2 < x \leq 7$ → $x = 3$, $x = 7$, $x = -2$, $x = 0$, $x = -3$, $x = -1$, $x = 4$

f) $|x| < 4$ → $x = 5$, $x = -3$, $x = 4$, $x = -1$, $x = 0$, $x = -6$, $x = 2$

g) $|x| \geq 5$ → $x = 0$, $x = -8$, $x = 3$, $x = -2$, $x = -6$, $x = -4$, $x = 5$

14 Unir cada inecuación con su conjunto solución.

a) $x + 5 < 7$

b) $2x > 10$

c) $x - 3 < 1$

d) $x : 2 > 2$

e) $-3x < -6$

f) $x : (-1) > -5$

$x < 5$ | $x < -2$ | $x > 2$ | $x < 4$ | $x < 2$ | $x > 5$ | $x > 4$

15 Plantear la inecuación y hallar los números que cumplen las siguientes condiciones.

a) El doble de su siguiente es mayor que seis.

b) La mitad de su anterior es menor que tres.

c) Su triple disminuido en cinco es mayor o igual que trece.

d) Su mitad aumentada en ocho es menor o igual que

e) La diferencia entre su doble y su triple es mayor que siete.

f) El cociente entre él y la diferencia entre dos y cinco es menor que dos.

16 Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a) $3x + 2 - x < 5x + 17$

b) $x - 7 + 8x \leq 11x + 9$

c) $4(x + 3) - 5 \geq x + 1$

d) $(x + 1) . (-3) > 21$

e) $(7x + 1) : (-2) < 10$

f) $-6(3x - 5) + 11x \geq 2$

g) $9(1 - x) + 2x \geq -5$

h) $-3(2x + 3) - 4x < 31$

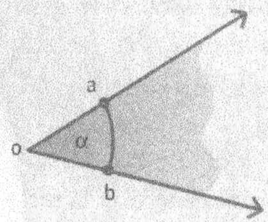
i) $2(x + 1) - 5(x + 2) \leq 7$

Ángulos. Sistema sexagesimal

INFOACTIVA

Un ángulo es la región del plano determinada por dos semirrectas que tienen el mismo origen. Para **nombrar un ángulo** se puede utilizar una de las siguientes formas:

- $a\widehat{o}b$, se escribe el vértice en el medio;
- $\widehat{o}$ se escribe solo el vértice;
- $\widehat{\alpha}$ se escribe una letra griega.

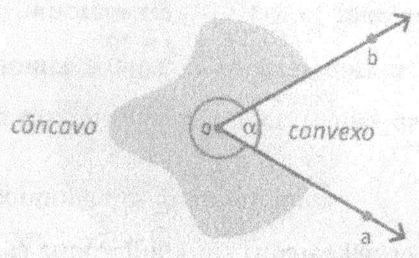


El **sistema sexagesimal** se usa para escribir medidas de ángulos.
En el sistema sexagesimal, un giro completo se divide en 360 partes iguales y cada una de esas partes se denomina **grado**.

Minuto sexagesimal: $1' = \frac{1}{60}$ de $1°$

segundo sexagesimal: $1'' = \frac{1}{60}$ de $1'$

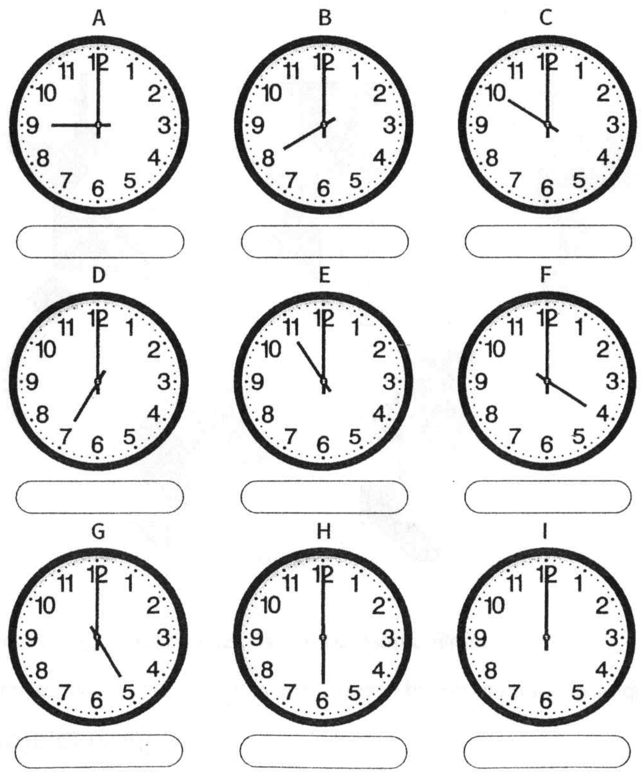
Un **ángulo** es **cóncavo** cuando es mayor que un llano. Es **convexo** cuando es menor.



Resumen de la clasificación de los ángulos según su amplitud:

ÁNGULOS
- **NULOS (exactamente 0º)**
- **CONVEXOS**
  - **AGUDOS (entre 0 y 90º)**
  - **RECTOS (exactamente 90º)**
  - **OBTUSOS (entre 90 y 180º)**
- **LLANOS (exactamente 180º)**
- **CÓNCAVOS (entre 180 y 360º)**
- **COMPLETOS O DE UNA VUELTA (exactamente 360º)**

2. Clasifiquen los ángulos convexos que forman las agujas del reloj e indiquen la hora que marcan en cada caso.



ACTIVIDADES INTEGRADORAS

17. Escriban una ecuación o inecuación, según corresponda que cumpla lo pedido en cada caso.

a. Solución única **b.** $x > 2$ **c.** $S = \emptyset$ **d.** $-8 = x$ **e.** $S = \{-3; 3\}$

18. Hallen el o los valores de x.

a. $17 - 7x \leq -3x + 1$
b. $4(x^2 - 3) = 24$
c. $(30 + 3x) : 2 = 3$
d. $2(x - 7) + 8 > x + 1$
e. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{x} = 14$
f. $7 - 3(-4 + x) \leq 3x + 1$

19. Planteen y resuelvan.

a. El doble de un número disminuido en cuatro unidades es igual a dicho número aumentado en 9.

b. La tercera parte de la suma entre un número y 5 da por resultado 4.

c. La raíz cúbica de la suma entre un número y tres es el opuesto de 1.

d. La suma entre la edad de Gastón y el triple de la que tenía hace cinco años es 85. ¿Qué edad tiene Gastón?

e. El cubo de un número aumentado en cinco unidades es menor al opuesto de 3.

f. El siguiente del triple del opuesto de un número es mayor o igual al doble de cinco.

20. Completen:

Recta	Inecuación	Conj. Solución	Lenguaje coloquial
	$x \leq 8$		
			Todos los números menores o iguales a 6
		$S = \{5; 6; 7; ...; \infty\}$	
			Todos los números menores que 0 y mayores o iguales a -2

21. Encuentren los valores de las dos incógnitas a y b. Hallen los números de las casillas con expresiones y deduzcan, sabiendo que la estrella es mágica, los números de las tres casillas vacías.

3. Para un correcto funcionamiento de una máquina de estampado, es necesario calibrar sus rodillos. Para ello, hay que girar uno de ellos 20° y el otro 35°. ¿Cuántos grados se giró en total?

4. Un barco en alta mar gira su timón 45° 38' 12" y como no logró adquirir el rumbo deseado nuevamente lo hace 10° 50' 45". ¿Cuántos grados necesitó girar el timón para lograr el rumbo?

Para realizar sumas o restas, hay que agrupar de a 60 para pasar de una unidad a otra, lo mismo sucede al multiplicar o dividir.

Suma

50° 23' 11"
+ 18° 49' 54"
68° 72' 65"
-60' -60"
68° 12' 5"
+1° +1'
69° 13' 5"

Se realizan tres cuentas independientes, para grados, minutos y segundos.

En el caso de que los minutos o segundos superen los 60, se debe hacer la conversión.

60" = 1'
60' = 1°

Resta

1° = 60'
59° 30' 12"
- 27° 43' 02"

Como a 30' no podemos restarle 43', 1° se transforma en 60'.

58° 90' 12"
- 27° 43' 02"
31° 47' 10"

Multiplicación

12° 23' 04"
X 4
48° 92' 16"
- 60'
48° 32' 16"
+ 1°
49° 32' 16"

60' = 1°

División

45° 12' 22" | 2
22° 36' 11"
01°
1° = 60'
72' 22"
12 0
0

5. Resuelvan los siguientes cálculos:

a. 25° 30' 35" + 11° 27' 59" =
b. 123° 18" + 49° 33' 45" =
c. 45° 23' 11" - 18° 11' 23" =
d. 145° 45' 11" . 8 =
e. 38° 15' 21" : 3 =
f. 90° - 14° 23' 36" =
g. 180° - 23° 42' 15" =
h. 39° 45' 23" : 2 =

6. Indiquen Verdadero (V) o Falso (F) en cada caso, explicando el error en las respuestas falsas.

a. 25° 15' 33" + 25° 8' 49" = 50° 23' 82"
b. 15° 11" + 125° 18' 45" = 140° 29' 45"
c. 15° 38' 05" . 3 = 46° 54' 15"
d. 25° 18' - 20° 15' 33" = 5° 02' 13"

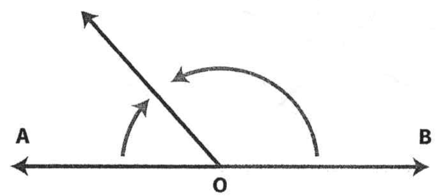
7. Planteen y resuelvan:

a. El doble de 30° 22' 05"más la mitad de 45° 11' 18".
b. El doble de la suma entre 45° 22' y 33° 45' 42".
c. La diferencia entre el doble de 48° 25' y 35° 14' 16".
d. El cuádruplo de 11° 25' 23" aumentado en 18° 20'.

8. Calculen:

a. 4 . (30° 20' 15" + 25° 12' 18") =
b. 180° - (26° 13' 12" + 3° 23") =
c. 36° 12' 15" : 5 + 13° 12' 14" : 2 =
d. 45° 11' 23" + 11° 25' . 2 - 11° 45' 45" : 3 =

Relaciones entre ángulos



Dos ángulos que poseen un lado en común y los otros dos son semirrectas opuestas, se denominan **adyacentes**. Estos ángulos son consecutivos y sumados forman un ángulo llano.

Decimos que son suplementarios aquellos ángulos que al sumar sus amplitudes dan 180°. Los ángulos adyacentes por definición son **suplementarios**, pero no todos los suplementarios son necesariamente adyacentes. Esto se debe a que no siempre los suplementarios son consecutivos.

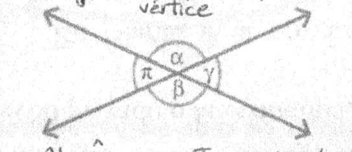
Llamamos **complementarios** a los ángulos cuyas amplitudes sumadas dan por resultado un ángulo recto (90°). Estos ángulos pueden ser o no consecutivos.

Dado un ángulo cualquiera, decimos que su opuesto es aquel que al sumarlo completa un giro (360°). El opuesto de un ángulo cóncavo es uno convexo y viceversa.

Según su posición

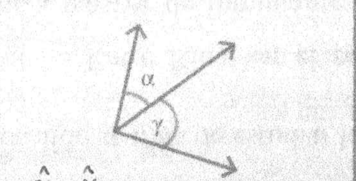
Opuestos por el vértice: tienen el vértice en común y sus lados son semirrectas opuestas.

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son opuestos por el vértice



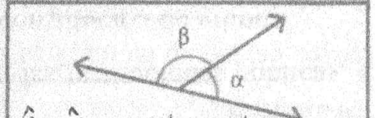
$\hat{\pi}$ y $\hat{\gamma}$ son opuestos por el vértice

Consecutivos: tienen el vértice y un lado en común.



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ son consecutivos

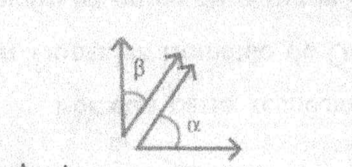
Adyacentes: son consecutivos y suplementarios.



$\hat{\beta}$ y $\hat{\alpha}$ son adyacentes

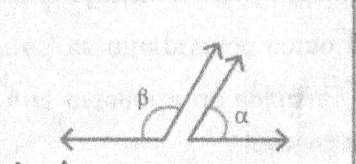
Según su medida

Complementarios: la suma es igual a 1 recto.



$\hat{\beta}$ y $\hat{\alpha}$ son complementarios

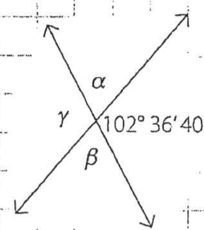
Suplementarios: la suma es igual a 1 llano.



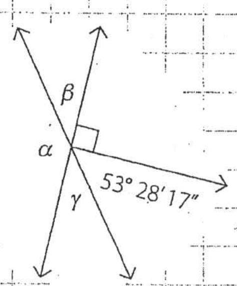
$\hat{\beta}$ y $\hat{\alpha}$ son suplementarios

Calcular la amplitud de todos los ángulos de cada figura.

a)



b)



9. Completen con nulo, agudo, llano, recto y obtuso.

a. El complemento de un ángulo agudo es un ángulo ………….

b. El suplemento de un ángulo nulo es un ángulo ……………….

c. El complemento de un ángulo recto es un ángulo …………….

d. El ángulo adyacente de un obtuso es un ángulo ……………….

10. Indiquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas, en caso contrario, corregirlas y expresarlas de la forma correcta (de ser necesario hagan una figura de análisis para explicar).

a. Dos ángulos adyacentes nunca pueden ser iguales.

b. Dos ángulos obtusos a veces pueden ser adyacentes.

c. Dos ángulos agudos nunca pueden ser complementarios.

d. Dos ángulos agudos siempre son suplementarios.

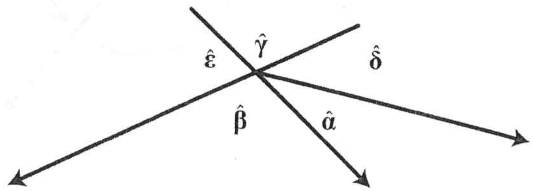
e. Un ángulo agudo y otro obtuso a veces pueden ser adyacentes.

11. Calculen la amplitud de los ángulos indicados a partir de los datos dados. Justifiquen su respuesta.

a.

$\hat{\varepsilon} = 125°$

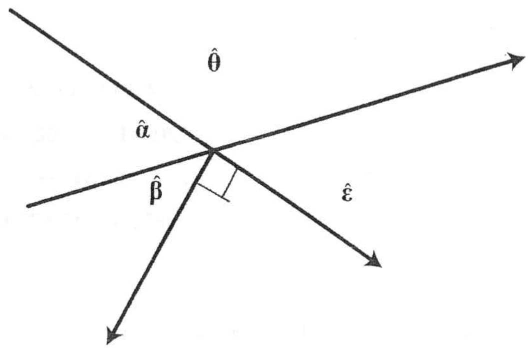
$\hat{\delta} = 30°$



$\hat{\alpha} =$ $\hat{\beta} =$ $\hat{\gamma} =$

b.

$\hat{\theta} = 115° \, 11' \, 38''$



$\hat{\alpha} =$ $\hat{\beta} =$ $\hat{\varepsilon} =$

12. Pasen a lenguaje algebraico y calculen:

a. La mitad del complemento de un ángulo $\hat{\alpha}$, si $\hat{\alpha} = 26° \, 30'$

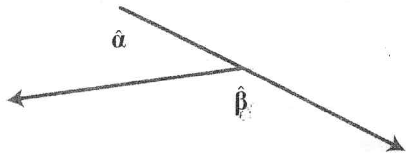
b. El complemento de la mitad de un ángulo $\hat{\varepsilon}$, si $\hat{\varepsilon} = 26° \, 30'$

c. El triple del suplemento de un ángulo $\hat{\gamma}$, si $\hat{\gamma} = 29° \, 30' \, 26''$

d. El suplemento del triple de un ángulo $\hat{\beta}$, si $\hat{\beta} = 29° \, 30' \, 26''$

13. Planteen la ecuación y hallen la amplitud de cada ángulo. Justifiquen en cada caso la ecuación planteada.

a.

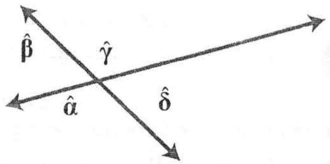


$\hat{\alpha} = 2 \, . \, x$

$\hat{\beta} = 10 \, . \, x - 60$

b. $\hat{\delta}$ y $\hat{\varepsilon}$ son complementarios $\hat{\delta} = 5 \, . \, x + 20° \, 30'$ $\hat{\varepsilon} = 3 \, . \, x - 30'$

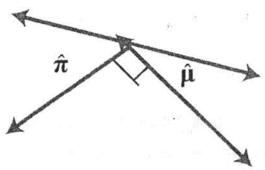
c.



$\hat{\gamma} = 2 \, . \, x + 20°$

$\hat{\alpha} = x + 50°$

d.



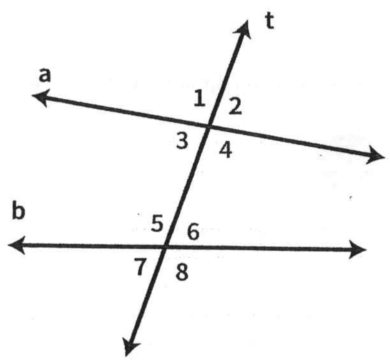
$\hat{\pi} = 3 \, . \, x - 20°$

$\hat{\mu} = x + 10°$

Ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal

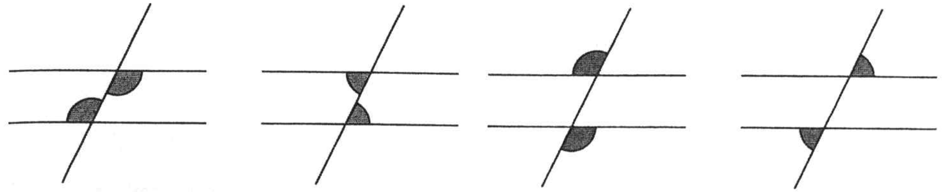
Cuando tenemos dos rectas **coplanares** (pertenecientes al mismo plano) cortadas por una transversal, quedan determinados ocho ángulos.

Decimos que los ángulos 1, 2, 7 y 8 son **externos,** mientras que 3, 4, 5 y 6 son **internos** a las rectas. Podemos determinar parejas de ángulos según sus disposiciones con respecto a la recta trasversal.



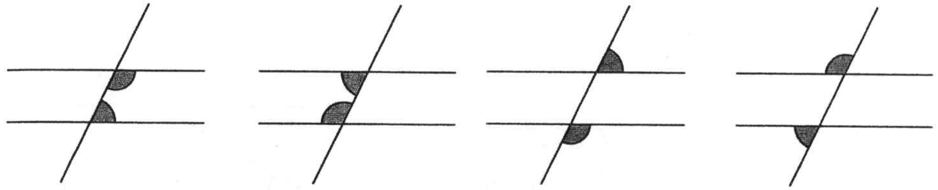
Los ángulos **alternos** son aquellos no adyacentes que se encuentran en lados opuestos de la transversal.

Encontramos:



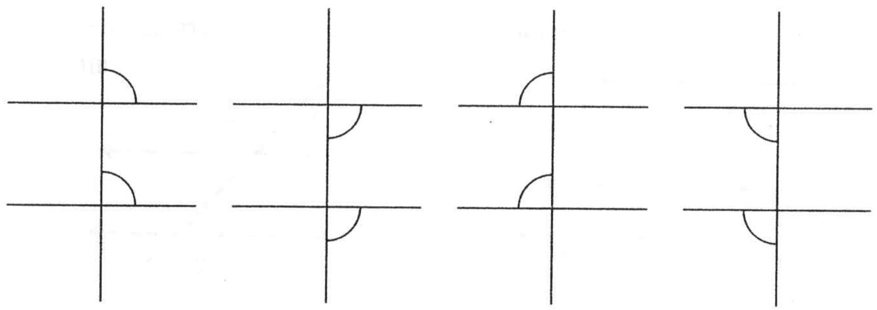
Alternos internos **Alternos externos**

Loa ángulos **conjugados** son aquellos no adyacentes que se encuentran del mismo lado de la transversal. Encontramos:



Conjugados internos **Conjugados externos**

Se conoce como ángulos **correspondientes** a dos ángulos no adyacentes que se encuentren del mismo lado de la transversal, pero uno es interno y el otro externo.



Correspondientes

14. Indiquen qué relación guardan los siguientes pares de ángulos:

a. $\hat{\alpha}$ y $\hat{\theta} \rightarrow$

b. $\hat{\alpha}$ y $\hat{\eta} \rightarrow$

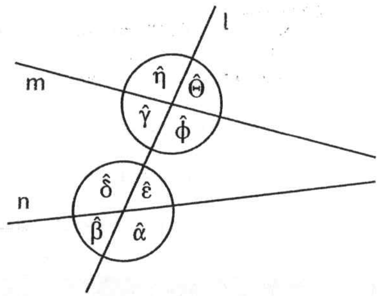
c. $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma} \rightarrow$

d. $\hat{\beta}$ y $\hat{\theta} \rightarrow$

e. $\hat{\varphi}$ y $\hat{\alpha} \rightarrow$

f. $\hat{\delta}$ y $\hat{\eta} \rightarrow$

g. $\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta} \rightarrow$



15. Tracen un par de rectas y nómbrenlas A y B, luego una transversal a ellas y nómbrenla C. Marquen:

a. Con rojo un par de ángulos alternos internos.

b. Con amarillo un par de ángulos conjugados externos.

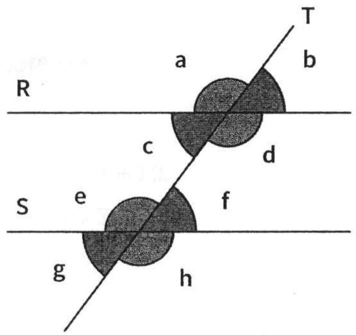
c. Con verde un par de ángulos correspondientes.

3. Construyan dos rectas paralelas.

INTEGRANDO LAS TIC

Para recordar cómo trazar dos rectas paralelas, busquen "Construcción de rectas paralelas y perpendiculares" en el canal de YouTube de Educatina.

En el caso especial de que las rectas atravesadas por la transversal sean paralelas, los ángulos que quedan determinados presentan ciertas particularidades en cuanto a su amplitud.



16. Imaginemos que la recta S se desplaza sobre T hasta quedar sobre R, veríamos que los ángulos que determina S al ser cortada por T, son congruentes (igual amplitud) que los que determina R al ser cortada por T.

a. Con una hoja de calcar, copien los ángulos determinados sobre S y luego superpónganlos sobre R.

b. Completen con el ángulo que corresponde en cada caso:

$\hat{a}$ = ... $\hat{g}$ = ... $\hat{h}$ = ... $\hat{f}$ = ...

- ¿Qué nombre reciben los pares de ángulos del punto anterior?

PARA SABER MÁS

Los ángulos correspondientes que quedan determinados por rectas paralelas son congruentes. Por lo tanto, los ángulos alternos internos entre paralelas tienen igual amplitud y los ángulos alternos externos entre paralelas son iguales.

Los ángulos conjugados internos y externos entre paralelas son suplementarios.

17. Completen las siguientes oraciones, a partir del gráfico de la página 66.

a. Si $\hat{e} = \hat{a}$ por ser .... y $\hat{a}$.... $\hat{d}$ por ser opuestos por el vértice, entonces $\hat{e} = \hat{d}$.

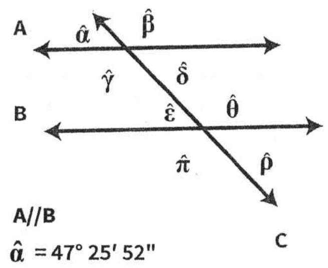
b. Si $\hat{g}$ .... $\hat{c}$ por ser correspondientes y $\hat{c} = \hat{b}$ por ser ...., entonces $\hat{g} = \hat{b}$.

c. Por ser adyacentes, $\hat{a} = \hat{c}$ son .... y $\hat{a} = \hat{e}$ por ser ....; por lo tanto, e y c son suplementarios.

d. $\hat{h}$ y $\hat{f}$ son ....; por lo tanto, suplementarios, $\hat{f}$ .... $\hat{b}$ por ser correspondientes, en conclusión $\hat{h}$ y $\hat{b}$ son suplementarios.

18. Den la amplitud de los siete ángulos restantes en cada figura. Justifiquen cada resultado.

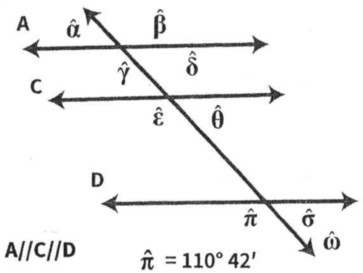
a.



A//B

$\hat{\alpha}$ = 47° 25′ 52″

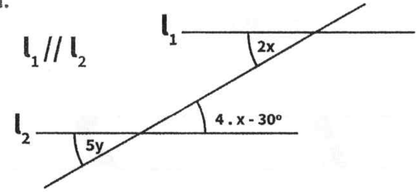
b.



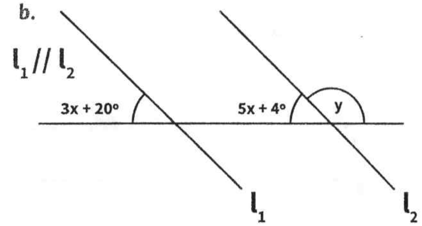
A//C//D $\hat{\pi}$ = 110° 42′

19. Planteen la ecuación en cada caso y hallen la amplitud de cada ángulo de la figura.

a.



b.



20. Completen con Siempre, A veces o Nunca, según corresponda en cada caso. Para cada situación, hagan una figura de análisis.

a. Los ángulos correspondientes entres paralelas .... son congruentes.

b. Los alternos externos entre paralelas .... son suplementarios.

c. Los ángulos conjugados internos entre paralelas .... son congruentes.

d. Los conjugados internos .... son suplementarios.

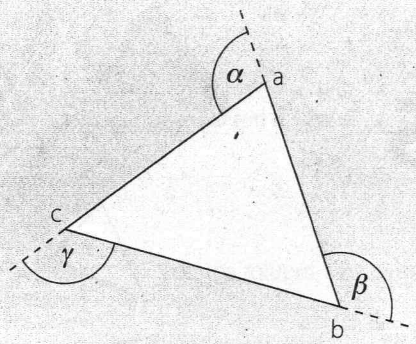
e. Los ángulos conjugados externos .... son suplementarios.

Para trabajar en clase

Elementos de un triángulo. Propiedad triangular

Teoría

Los elementos de un triángulo son:



Vértices: a, b y c

Lados: $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{ac}$

Ángulos interiores: $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$.

Ángulos exteriores: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$.

Propiedad triangular:
La longitud de cada uno de los lados de un triángulo es **menor que la suma** de las longitudes de los otros dos, y **mayor que su diferencia** (positiva).
Al lado de **mayor longitud** se opone el ángulo de **mayor amplitud** y viceversa.

1 **Considerar los segmentos que se indican y escribir con cuáles de los restantes se puede armar un triángulo.**

a) Rojo y verde.

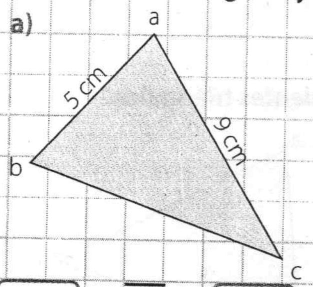
b) Marrón y celeste.

c) Verde y anaranjado.

d) Escribir los tríos de segmentos con los que no se puede formar un triángulo.

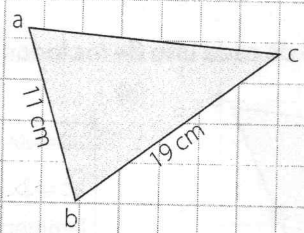
2 **Observar los triángulos y completar con las longitudes que correspondan.**

a)



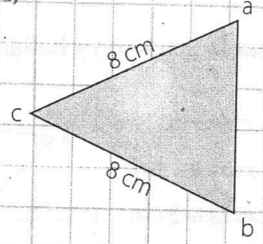
$\square < \overline{bc} < \square$

b)



$\square < \overline{ac} < \square$

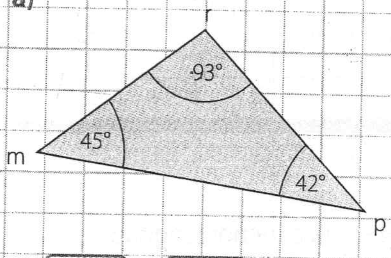
c)



$\square < \overline{ab} < \square$

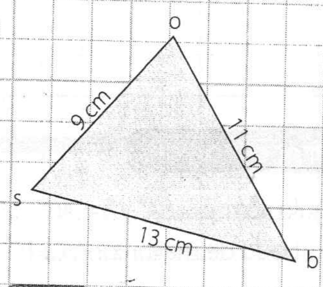
3 **Completar con el lado o ángulo que corresponda en cada caso.**

a)



$\square < \square < \square$

b)

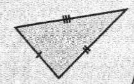
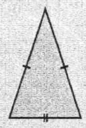
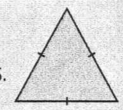


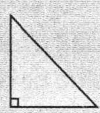
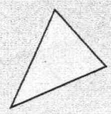
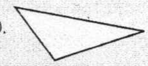
$\square < \square < \square$

Clasificación de triángulos

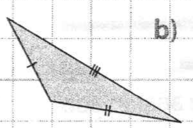
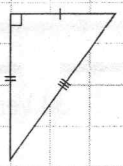
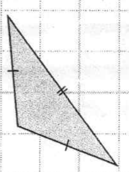
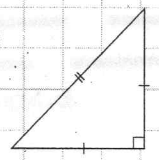
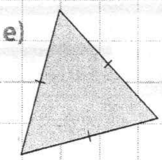
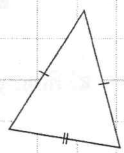
Teoría

Los triángulos se clasifican según la longitud de sus lados o la amplitud de sus ángulos.

Según sus lados
- Escaleno: los tres lados son distintos. 
- Isósceles: por lo menos dos lados son iguales.  → Equilátero: los tres lados son iguales. 

Según sus ángulos
- Rectángulo: un ángulo es recto. 
- Oblicuángulo: no tiene ningún ángulo recto.
  - Acutángulo: tres ángulos agudos. 
  - Obtusángulo: un ángulo obtuso. 

4 **Clasificar según sus lados y ángulos cada uno de los siguientes triángulos.**

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 
f) 

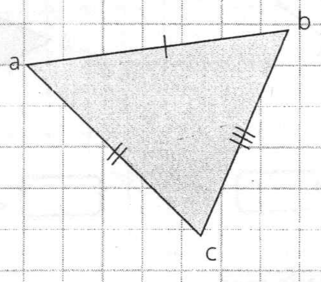
5 **Calcular y responder.**

a) Si el perímetro de un triángulo equilátero es de 114 cm, ¿cuál es la longitud de cada uno de sus lados?

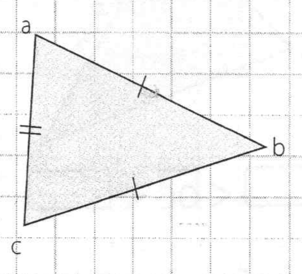
b) Si el perímetro de un triángulo isósceles es de 127 cm y el lado desigual mide 53 cm, ¿cuál es la longitud de cada uno de sus lados iguales?

6 **Plantear la ecuación y hallar la longitud de cada uno de los lados de los siguientes triángulos.**

a)
$$\begin{cases} \overline{ab} = 4x - 3 \text{ cm} \\ \overline{ac} = 3x + 1 \text{ cm} \\ \overline{bc} = 2x + 5 \text{ cm} \\ \text{Perímetro: } 66 \text{ cm} \end{cases}$$



b)
$$\begin{cases} \overline{ab} = 3x - 5 \text{ cm} \\ \overline{ac} = 2x + 2 \text{ cm} \\ \text{Perímetro: } 96 \text{ cm} \end{cases}$$



Para pensar y resolver

7 En el triángulo $a\hat{p}m$: $\hat{p} = 84°$ y $\hat{a} = 46°$.

a) ¿Cuál es el lado de mayor longitud?

b) ¿Cuál es el de menor longitud?

Para trabajar en clase

Propiedades de los ángulos de un triángulo

Teoría

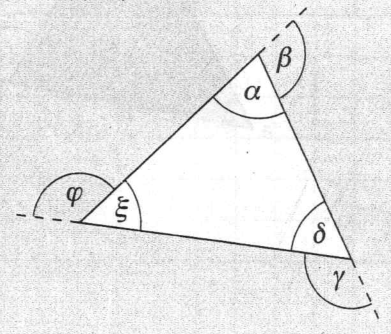
Los ángulos interiores y exteriores de un triángulo cumplen las siguientes propiedades:

I) $\hat{\alpha}+\hat{\delta}+\hat{\xi}=180°$

II) $\begin{cases}\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180° \\ \hat{\delta}+\hat{\gamma}=180° \\ \hat{\xi}+\hat{\varphi}=180°\end{cases}$

III) $\hat{\beta}+\hat{\gamma}+\hat{\varphi}=360°$

IV) $\begin{cases}\hat{\beta}=\hat{\delta}+\hat{\xi} \\ \hat{\gamma}=\hat{\xi}+\hat{\alpha} \\ \hat{\varphi}=\hat{\alpha}+\hat{\delta}\end{cases}$



8 **Calcular la amplitud del ángulo $\hat{b}$ en el triángulo $\overset{\triangle}{abc}$, si $\hat{a}=64°\ 38'\ 52''$ y $\hat{c}=75°\ 44'\ 39''$.**

9 **Hallar la amplitud de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, si el ángulo exterior a uno de ellos mide 117° 38′ 42″.**

10 **Plantear la ecuación y hallar la amplitud de los ángulos interiores del triángulo $\overset{\triangle}{abc}$, si $\hat{a}=3x+5°$, $\hat{b}=2x+45°$ y $\hat{c}=9x-10°$.**

11 **Hallar la amplitud de los ángulos interiores de los siguientes triángulos isósceles.**

a) Los ángulos iguales tienen una amplitud de 63° 49′ 52″.

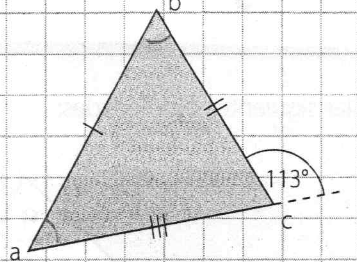
b) El ángulo opuesto a la base tiene una amplitud de 53° 41′ 32″.

c) El ángulo exterior del ángulo opuesto a la base tiene una amplitud de 129° 14′ 46″.

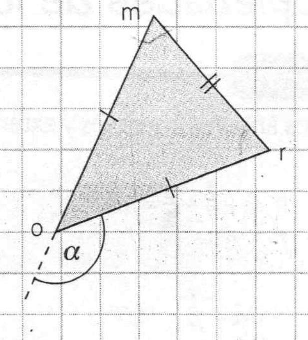
d) El ángulo exterior de uno de los ángulos iguales tiene una amplitud de 113° 51′ 8″.

12 **Hallar la amplitud de los ángulos interiores de cada triángulo.**

a)
$$\begin{cases} \hat{a} = 7x + 3° \\ \hat{b} = 8x + 5° \end{cases}$$



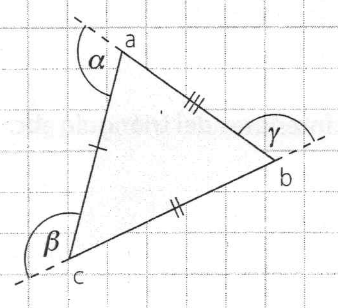
b)
$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 7x - 10° \\ \hat{m} = 2x + 22° \end{cases}$$



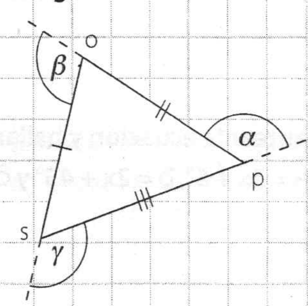
13 **Calcular los ángulos interiores del triángulo m$\hat{p}$r.**
$$\begin{cases} \hat{p} = 35°\ 22'\ 53'' \\ \hat{r} = \hat{p} + 13°\ 46'\ 29'' \end{cases}$$

14 **Hallar la amplitud de los ángulos interiores y exteriores de los siguientes triángulos.**

a)
$$\begin{cases} \hat{a} = 13x + \\ \hat{b} = 3x + 26° \\ \hat{c} = 4x + 28° \end{cases}$$

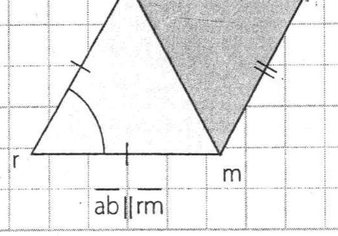


b)
$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 8x - 6° \\ \hat{\beta} = 6x - 1° \\ \hat{\gamma} = 7x - 11° \end{cases}$$



Para pensar y resolver

15 **Calcular la amplitud de los ángulos interiores del triángulo rojo.**



$\overline{ab} \parallel \overline{rm}$

Recordando lo aprendido

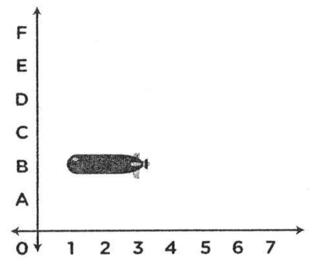
¡A JUGAR!

Dibujen en hoja cuadriculada dos tableros para jugar a la batalla naval, junto a su compañero de banco. En uno, marquen los tiros que hacen y en el otro deberán ubicar:

- 1 barco de 2 puntos
- 1 barco de 3 puntos
- 1 barco de 4 puntos

La batalla naval es un juego clásico para dos jugadores, quienes ubican en un plano que representa el océano, barcos de distintos tamaños.

En forma alternada, cada jugador puede hacer un tiro, en el caso de que el jugador 1 dé con el lugar exacto de uno de los barcos, el jugador 2 dirá tocado, cuando todos los puntos que forman el barco son tocados, dirá hundido. Por ejemplo:



El barco de la figura está formado por tres puntos.

Si el jugador 1 dijera: (1; A), el jugador 2 diría agua.

Si el jugador 1 dijera (1; B), el jugador 2 diría tocado.

Cuando nombre todas las coordenadas del barco (1; B), (2; B), (3; B), dirá hundido.

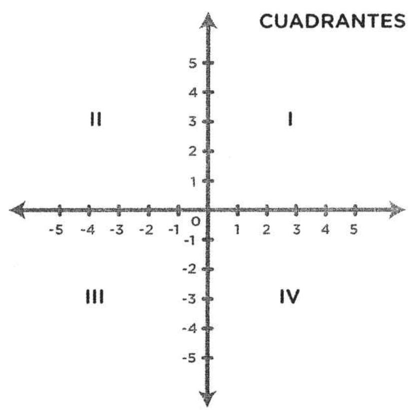
Coordenadas cartesianas

Para poder localizar puntos en un plano, se utilizan las coordenadas cartesianas ortogonales.

Cartesianas: fueron creadas por el filósofo matemático René Descartes.

Ortogonales: porque son perpendiculares, es decir, se cortan determinando cuatro ángulos rectos.

A diferencia de la batalla naval, usaremos números en cada eje y el plano quedará dividido en cuatro cuadrantes.



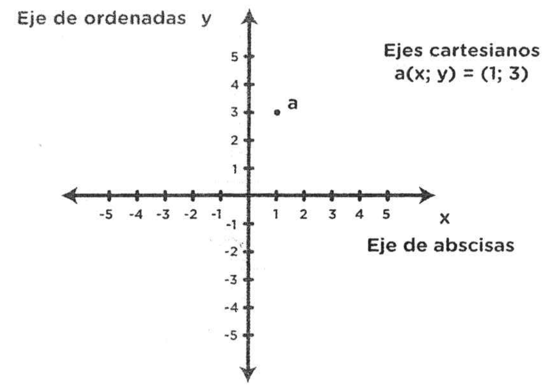
Al eje vertical se lo llama **eje de las ordenadas** y se lo representa con la letra "y". La información que se vuelca sobre él es la de la variable dependiente.

Al eje horizontal o **eje de las abscisas** se lo identifica con la letra "x" y, en él, se colocan los valores de la variable independiente.

En cada eje, los valores deben estar ubicados en escala, pudiendo tener ambos ejes la misma o diferente, pero es importante que a lo largo de cada uno, siempre sea la misma.

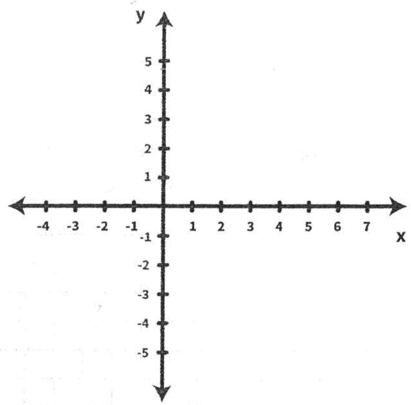
Cada punto del plano se identifica con una **coordenada** o **par ordenado**. Lo llamamos par, porque está conformado por dos números y decimos que es ordenado ya que siempre se indica primero el valor de la abscisa y luego, el de la ordenada (x; y).

El punto de intersección de los dos ejes recibe el nombre de **origen de coordenadas** (0; 0).

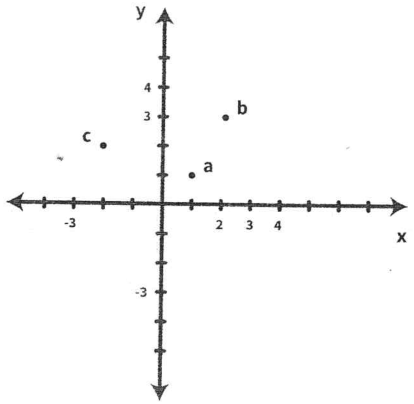


1. Armen en una hoja cuadriculada un par de ejes cartesianos y ubiquen barcos en los cuatro cuadrantes, luego den las coordenadas de cada uno de ellos.

2. Ubiquen en el par de ejes cartesianos los siguientes puntos: a = (0; 3), b = (-2; 0), c = (1; 4), d = (7; -2), e = (0; -4), f = (-3; 1).



3. Ubiquen el punto “d” de modo que se forme un paralelogramo. ¿Cuáles son sus coordenadas?



4. Construyan un par de ejes cartesianos.

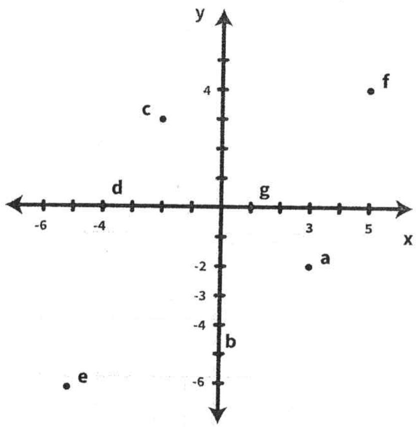
a. Ubiquen los siguientes puntos: a = (0; 2), b = (2; 0), c = (0; -2), d = (-2; 0).

b. Unan los puntos formando un cuadrilátero e indiquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifiquen.

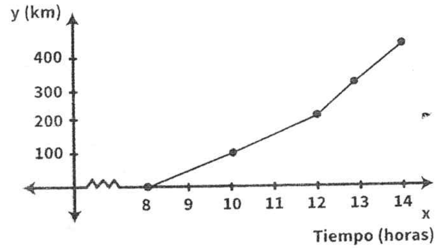
- El punto (1; 1) pertenece al cuadrilátero.
- El cuadrilátero que se formó es un cuadrado.
- (-1; 0) no pertenece a la diagonal del cuadrilátero.
- $\overline{ac}$ es un lado del cuadrilátero.

5. En un par de ejes cartesianos, ubiquen el punto “a” en (2; 1). Luego, tracen una circunferencia de tres unidades de radio y escriban dos puntos que sean interiores, dos que sean exteriores y dos que pertenezcan a la circunferencia.

6. A partir del siguiente gráfico, den las coordenadas de los puntos indicados.



7. El siguiente gráfico muestra el trayecto que hicieron Matías y Felipe desde su casa hasta llegar a la costa.



a. ¿A qué hora arrancaron el viaje?

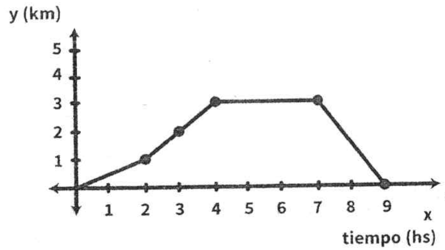
b. ¿Cuántos kilómetros habrán recorrido hasta las 10 horas?

c. ¿A qué velocidad se desplazaron durante las dos primeras horas de viaje?

d. ¿Qué otro dato aporta el gráfico?

e. Identifiquen y clasifiquen las variables.

8. Mateo y Federico salieron en bicicleta a las 10 horas desde su casa con rumbo al club.



a. ¿Cuánto demoraron en llegar?

b. ¿Cuántas horas estuvieron en el club?

c. ¿Cuánto tiempo les llevó el regreso?

d. ¿A qué hora regresaron?

e. ¿Qué velocidad llevaron durante las dos primeras horas de viaje?

f. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

9. En el estacionamiento donde Christian guarda su auto cada vez que debe ir al centro, le cobran por hora y no fraccionan el tiempo.

a. Indiquen cuánto pagará si estaciona media hora.

b. ¿Cuál será el importe si permanece 40 minutos?

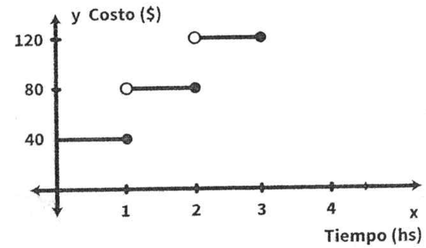
c. Por una hora de estacionamiento, ¿cuál es el precio?

d. Si demora una hora y media, ¿cuál es el cargo?

e. Si pagó $200, ¿cuánto tiempo estuvo como mínimo? ¿Y como máximo?

f. Indiquen cuáles son las variables.

g. El gráfico no es una línea continua. ¿Por qué?



10. Busquen gráficos, en diarios y revistas, luego analicen las variables.

a. Preparen cuatro preguntas a partir de la información que brindan.

b. Intercámbienlas con sus compañeros, contéstenlas y luego corrijan.

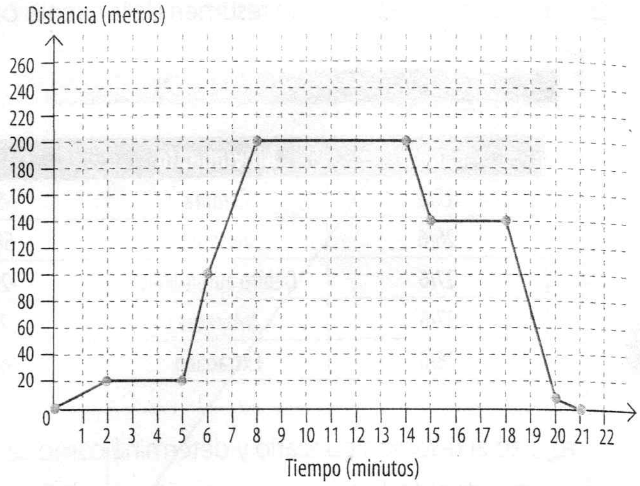
11 Martín sale de su casa hacia el kiosco para comprar algunas golosinas. En el camino se encuentra con Juan, se quedan charlando unos minutos y luego sigue su trayecto. Después de realizar la compra, emprende el regreso a su casa. En el trayecto, se queda durante un tiempo mirando la vidriera de la tienda deportiva. El gráfico de la derecha muestra la distancia a la casa de Martín desde que sale hasta que regresa. Respondé en tu carpeta.

a) ¿Cuánto tiempo tardó desde que salió de su casa hasta que llegó al kiosco? ¿Cómo te das cuenta?

b) ¿Cuánto tiempo estuvo conversando con Juan? ¿Cuánto tiempo estuvo comprando en el kiosco? ¿Cómo se puede obtener esa información a partir del gráfico?

c) La expresión (8; 200) indica la llegada de Martín al kiosco. ¿Qué expresión indica el momento en que termina su compra y comienza el regreso a su casa?

d) Ubicá la expresión (5; 20) en el gráfico. ¿Qué representa para la situación? ¿Y qué representa para la situación la expresión (20; 5)?



12 El costo de las llamadas telefónicas depende de dos factores: del tiempo que dure la comunicación y de la distancia a la cual se realiza. En el gráfico siguiente se encuentran representadas distintas llamadas realizadas por Enzo desde su oficina de trabajo.

a) ¿Cuál fue la llamada de mayor duración? ¿Y la de menor duración? ¿Cómo se interpreta esta información a partir del gráfico?

....

b) ¿Cuál fue la llamada más costosa? ¿Cuál fue su costo?

....

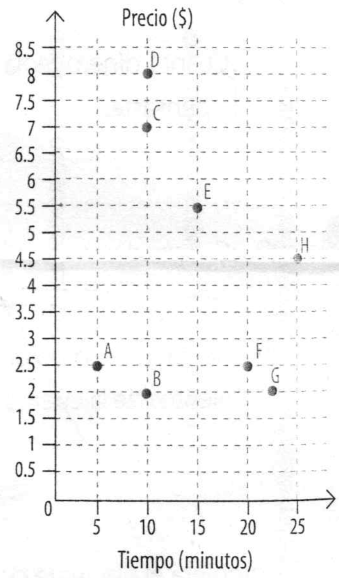
c) Indicá qué llamadas tuvieron la misma duración. De ellas, ¿cuál se realizó a mayor distancia? ¿Cómo puede saberse esa información?

....

....

d) ¿Tiene sentido en este gráfico unir los puntos marcados? ¿Por qué?

....

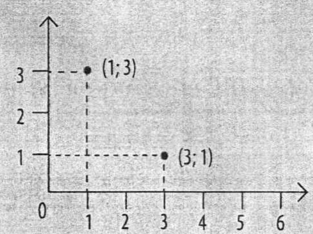


CARGANDO DATOS

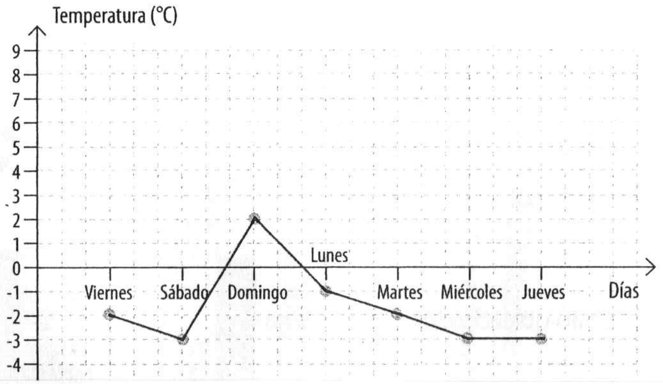
Gráficos cartesianos. Par ordenado

Un sistema cartesiano está formado por dos rectas perpendiculares llamadas **ejes.** El horizontal es el eje de **abscisas** y el vertical, el eje de **ordenadas.**

Cada dato del gráfico cartesiano se representa por un punto, escrito como **par ordenado.**



13. Pablo pasará cuatro días del mes de julio en la ciudad de Trevelin, en la provincia de Chubut, por trabajo. Decide viajar unos días antes para disfrutar del paisaje. Busca el pronóstico para esos días y le informan cuál será la temperatura mínima de cada día.



a) ¿Qué datos se ubican en el eje de abscisas? ¿Y en el de ordenadas?

b) ¿Qué informa el par ordenado (lunes; -1)?

c) ¿Qué temperatura mínima se pronostica para el quinto día de la estadía de Pablo? ¿Qué par ordenado lo indica?

d) ¿Cuándo la temperatura mínima fue de -3 ºC? ¿Qué par ordenado lo indica?

14. La siguiente tabla muestra las temperaturas máximas en Trevelin para los mismos días en que Pablo estará en esa ciudad.

Día	Viernes	Sábado	Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves
Temperatura (ºC)	6	6	8	9	6	4	2

a) Ubicá los datos de la tabla en el sistema cartesiano anterior. Uní los puntos para analizar la variación.

b) ¿Qué día será el más frío de la estadía? ¿Cómo se dan cuenta en el gráfico?

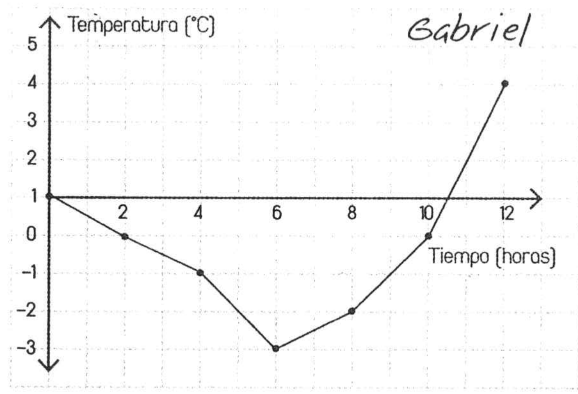
c) ¿Qué día tendrá la mayor amplitud térmica? ¿Cuánto es?

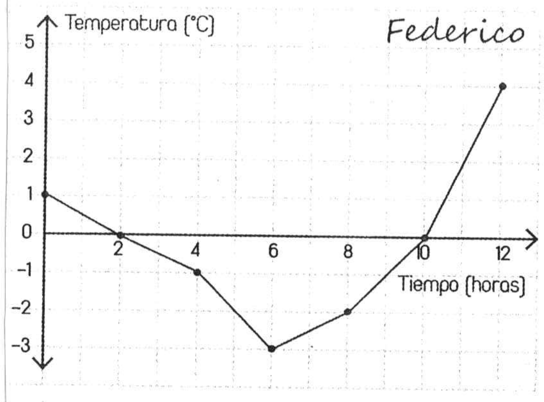
d) ¿Qué día tendrá la menor amplitud térmica? ¿Cuánto es?

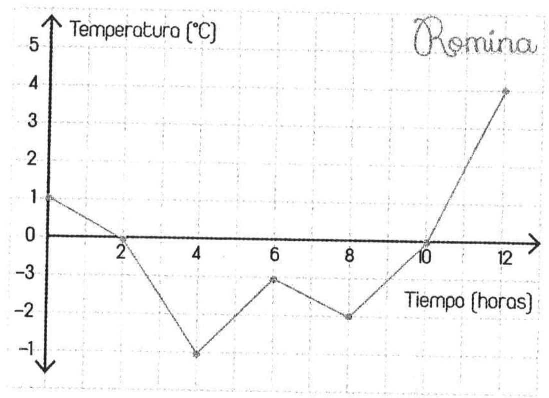
15. En un observatorio meteorológico de Santa Cruz se midió la temperatura cada 2 horas durante un día y se armó esta tabla.

Hora del día	0	2	4	6	8	10	12
Temperatura (°C)	1	0	−1	−3	−2	0	4

Los chicos hicieron estos gráficos usando la información de la tabla.







Respondan las preguntas en parejas.

a. ¿En todos los gráficos se puede leer la información de la tabla?

b. ¿Cuál de los gráficos cumple con todas las características que se formularon en la página anterior?

Funciones: tablas y gráficos

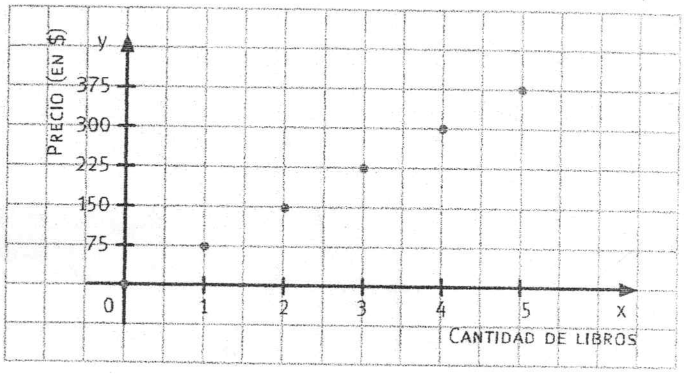
INFOACTIVA

Una **función** es una relación entre dos variables en la cual a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda.

En el siguiente ejemplo, se representa una función a través de un **gráfico** y una **tabla**.

Ignacio vende una colección de libros. Cada libro cuesta $ 75.

Cantidad de libros	Precio (en $)
0	0
1	75
2	150
3	225
4	300
5	375



- Para una determinada cantidad de libros (variable independiente) existe un único precio (variable dependiente).

Los distintos valores que puede tomar la variable independiente forman el **dominio** de la función.
Los distintos valores que toma la variable dependiente forman la **imagen** de la función.

En algunas funciones, la relación entre dos variables se puede expresar a través de una fórmula matemática. A partir del valor de una de las variables, se puede encontrar el valor de la otra.

En el ejemplo anterior, la relación entre la cantidad de libros y el precio se puede expresar con la fórmula $y = 75x$, donde x es la cantidad de libros e y es el precio a pagar.

Rodrigo compró 3 libros.

$y = 75 . x$

$x = 3 \longmapsto y = 75 . 3$

$y = 225$

Debe pagar $ 225.

Laura pagó $ 375.

$y = 75 . x$

$y = 375 \longmapsto 375 = 75 . x$

$375 : 75 = x$

$5 = x$ *Compró 5 libros.*

TEST de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Qué es una función?

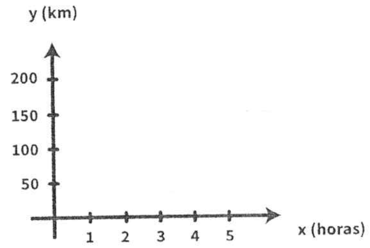
b. ¿Qué es el dominio de una función?

c. ¿Qué es la imagen de una función?

d. Si la fórmula de una función es $y = 4x$, ¿cuál es el valor de y para $x = 4$?

1. Completen la tabla y luego realicen el gráfico, sabiendo que corresponde a un auto que circula a 50 kilómetros por hora (km/h).

Horas	Kilómetros recorridos
0	
1	
2	
3	
4	



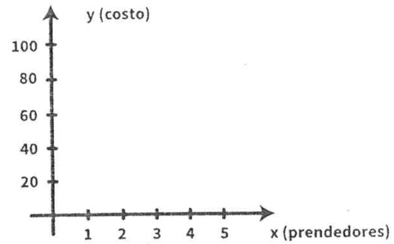
a. ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

b. Para obtener los valores de kilómetros recorridos, ¿qué cálculo hicieron?

c. Encuentren una fórmula que permita calcular la distancia recorrida (y) en función del tiempo (x).

2. Bianca hace prendedores que vende a $20 cada uno. Completen la tabla y hagan el gráfico correspondiente.

Unidades	Costo
0	
1	
2	
3	

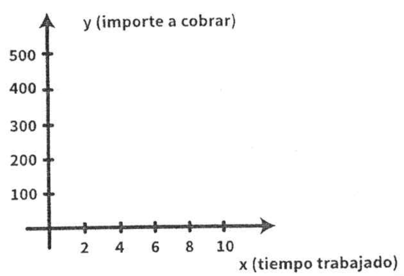


a. ¿Qué cálculo realizaron para obtener el costo, en función de la cantidad de unidades?

b. ¿Cuáles son las variables?

c. Den la fórmula que le permita calcular a Bianca el costo por comprar "x" unidades.

3. Federico es electricista y cobra $100 la visita y $50 por hora trabajada. Encuentren una fórmula que relacione las horas trabajadas y lo cobrado. Luego, completen la siguiente tabla.



Horas trabajadas	Cobrado
1	
2	
3	
4	
5	
0	

4. Una pileta de 2000 litros se desagota por medio de una bomba a razón de 100 litros por hora. La siguiente fórmula permite calcular los litros que quedan en la pileta en función del tiempo que lleva prendida la bomba de desagote.

$y = 2000 - 100\,x$

Donde "y" representa los litros de agua que quedan en la pileta, que depende de "x", que son las horas que lleva prendida la bomba de desagote.

a. Completen:

x = tiempo que se encuentra prendida la bomba	y = litros restantes en la pileta
0	2000 - 100 . 0 =
1	2000 - 100 . 1 =
2	2000 - 100 . 2 =
3	
4	
5	
6	

b. ¿Cuántas horas tarda en desagotarse la pileta?

c. ¿Cuántos litros quedan en la pileta luego de 10 horas de estar prendida la bomba?

d. Si en la pileta hay 300 litros, ¿cuántas horas estuvo prendida la bomba?

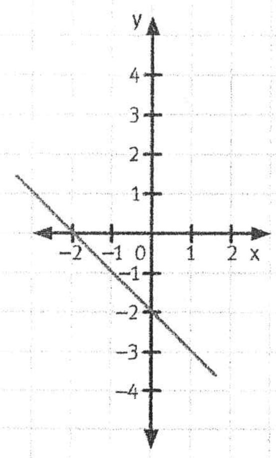
e. Vuelquen los datos obtenidos en un gráfico.

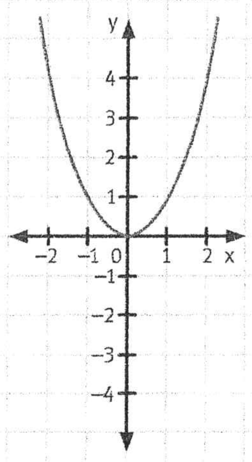
5. **Completen las tablas. Luego, escriban debajo de cada gráfico la función que corresponde.**

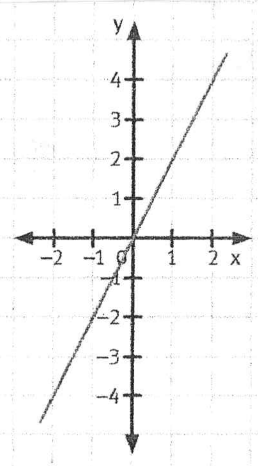
x	$y = 2x$
2	
1	
0	
−1	
−2	$y = 2 \cdot (-2)$ $y = -4$

x	$y = x^2$
2	
1	
0	
−1	$y = (-1)^2$ $y = 1$
−2	

x	$y = -x - 2$
2	$y = -2 - 2 = -4$
1	
0	
−1	
−2	







LECTURA

Los censos en la historia argentina

Un censo es un conteo y recuento de la población de un determinado país cada una cierta cantidad de tiempo. Comúnmente, los censos son realizados cada 10 años. Este estudio demográfico arroja datos importantes para los institutos de estadística nacionales, a fin de constatar la cantidad de personas por región que hay y qué necesidades o características específicas tienen las viviendas en las que habitan.

En Argentina, el primer censo poblacional se desarrolló en 1869 bajo el gobierno de Domingo F. Sarmiento. La unidad de análisis fue el individuo y solo constó de ocho preguntas. Según ese registro, en el país, vivían 1.800.000 personas.

Más de 20 años después, en 1895, aparecen las preguntas sobre religión, fecundidad y propiedad. El total de habitantes fue de poco más de cuatro millones.

El censo de 1914 es un Censo de Población Agropecuario e Industrial. La población ascendió a casi ocho millones de personas.

En 1947, la unidad de observación es la familia. En las preguntas sobre el estado civil, aparece la condición de separado y en las de ocupación, el desocupado. Con casi 16 millones de habitantes.

En el siguiente censo, además de preguntar sobre estado civil, se pregunta sobre la situación conyugal. En 1960, se analizaron también las causas de la deserción en la escolaridad primaria y se contaron unos 20 millones de habitantes.

Los avances tecnológicos acompañan el censo de 1970 y, por primera vez, se usa una lectora óptica de la cédula censal para procesar los datos. Hubo bastantes inconvenientes en su aplicación. Habitando el suelo argentino 23 millones de personas.

En 1980, aparecen dos formularios: uno básico y otro ampliado. El segundo solo se aplica en una parte de la población que es seleccionada por muestra en las localidades y provincias más pobladas. Casi llegamos a los 28 millones.

El censo de 1990 se realizó finalmente en 1991 por razones presupuestarias. Siendo 32.600.000 el número de habitantes.

En 2001, con un enrarecido clima social y con muchas críticas a la realización del conteo, desaparece el formulario de muestreo y se hacen preguntas sobre población originaria y la discapacidad. Fuimos más de 36.260.130.

En 2010, las unidades de análisis fueron la población, hogares y viviendas, arrojando en este caso que la existencia de 40.117.096 habitantes en la República Argentina.

Actividad

1. ¿Qué sucede con la cantidad de habitantes a medida que transcurre el tiempo?
2. ¿Siempre se analizan las mismas características de la población en los censos? ¿Cuáles son los ejemplos?

Estadística

La rama de la matemática que consiste en el proceso de recolección, clasificación, descripción, representación y análisis de los datos (como lo que se realiza en un censo) es la **estadística**.

En el artículo anterior, vemos que el censo se realiza a todos los habitantes del país. A ese conjunto de personas, individuos, objetos o elementos sobre los que vamos a analizar una o más cualidades, propiedades o características lo llamamos **población**.

Como no siempre es posible realizar un estudio o investigación sobre el total de la población, se selecciona una parte o subconjunto de esa población, y es a lo que llamamos **muestra**. Por ejemplo, cuando alguien tiene que hacerse un examen médico no se extraen toda la sangre para saber cuál es su estado de salud, sino que le extraen una cantidad mínima necesaria para realizar el estudio correspondiente.

Podemos ver partes de los cuestionarios del censo de 2010 en la República Argentina:

1 ¿Cuál es la relación o parentesco con el jefe (a) del hogar?
- ☐ Jefe (a)
- ☐ Cónyugue o pareja
- ☐ Hijo (a) / Hijastro (a)
- ☐ Yerno / Nuera
- ☐ Nieto (a)
- ☐ Padre / Madre / Suegro (a)
- ☐ Otros familiares
- ☐ Otros no familiares
- ☐ Servicio doméstico y sus familiares

2 ¿Es varón o mujer?
- ☐ Varón
- ☐ Mujer

3 ¿Cuántos años tiene? (en años cumplidos)
Si todavía no cumplió un año anote 000
Años ☐☐☐

4 Fecha de nacimiento
Día: ☐☐ Mes: ☐☐ Año: ☐☐☐☐

5 ¿En qué país nació?
- ☐ Argentina — **Si la persona tiene 3 años o más continúe en 7**
- ☐ Otro país — **Menor de 3 años — Fin de la entrevista**

VIVIENDA

1 Tipo de vivienda particular **Anote por observación**
- ☐ Casa
- ☐ Rancho
- ☐ Casilla
- ☐ Departamento
- ☐ Pieza en inquilinato
- ☐ Pieza en hotel familiar o pensión
- ☐ Local no construido para habilitación
- ☐ Vivienda móvil
- ☐ Persona/s viviendo en la calle — **Pase a 4**

2 La vivienda está...
habitada
- ☐ con personas presentes
- ☐ con todas las personas temporalmente ausentes

deshabitada
- ☐ en alquiler o venta
- ☐ en construcción
- ☐ se usa como comercio, oficina o consultorio
- ☐ se usa para vacaciones, fin de semana u otro uso temporal
- ☐ por otra razón

— **Fin de la entrevista**

ATENCIÓN CENSISTA: recuerde que para el censo, un hogar es la persona o grupo de personas que comparten los gastos de alimentación y viven bajo el mismo techo.

GUÍA PARA DETECTAR HOGARES:
1. Al llegar a la vivienda que le corresponde censar, indague cuántas personas pasaron la noche allí.
2. Pregunte si todas las personas comparten los gastos de alimentación.
3. Abra un cuestionario para cada hogar detectado en la vivienda.
4. En caso de que detecte más de un hogar en la vivienda, abra un nuevo cuestionario y transcriba los mismos datos de Ubicación Geográfica incluyendo el mismo número de Vivienda en el nuevo cuestionario. Continúe en la pregunta 4.
5. Numere correlativamente los hogares en el casillero Hogar N°.

3 Cantidad de hogares en la vivienda: ☐☐
Hogar N°: ☐☐

Como podemos ver, cuando se toma como unidad de análisis a la vivienda, algunas características que importan son el tipo de vivienda, si está habitada o no, la cantidad de hogares en la vivienda. Cuando la unidad de análisis es el individuo, algunas características que se estudian son parentesco, sexo, edad, nacionalidad.

A cada una de esas características la denominamos **variable**; por lo cual se hace evidente que de un mismo individuo se puede estudiar más de una variable.

Hay variables como por ejemplo tipo de vivienda (casa, rancho, casilla, etc.) toman valores no numéricos, a estas variables las llamamos **variables cualitativas**.

Mientras que las que toman valores numéricos, las llamamos **variables cuantitativas**, como por ejemplo cantidad de hogares en vivienda.

3. En la página del INDEC (Instituto Nacional de Estadística y Censos de la República Argentina), busquen el formulario del cuestionario básico de viviendas particulares y traten de identificar:

a. Identifiquen cuatro variables cualitativas y realicen un listado de los valores que pueden tomar cada una de ellas.

b. Identifiquen cuatro variables cuantitativas e indiquen cuáles son los valores que pueden tomar.

Las variables cuantitativas pueden diferenciarse en **continuas o discretas**, esto tiene que ver con el conjunto numérico en que trabajen. Las variables discretas solo admiten números enteros, mientras que las continuas contemplan también los racionales.

Ejemplos:

- Si analizamos la cantidad de autos que pasan por un peaje a una hora determinada, obtendremos como respuesta un número que será entero. No podrán pasar 3,5 autos, por lo tanto, la variable "Cantidad de autos" es cuantitativa y discreta.

- La variable "Tiempo que tardó en llegar a la escuela", es cuantitativa y continua, ya que podríamos tardar 1.30 hs.
- En el caso de tener una encuesta sobre la calificación de una obra de teatro donde los espectadores deban decidir entre: buena, mala o regular, estaríamos frente a una variable cualitativa.

Cuando se hace un relevamiento de datos, puede pasar que algunos de ellos se repitan. Se denomina **frecuencia absoluta** (fi) a la cantidad de veces que se reitera un determinado valor de una variable.

La **frecuencia relativa** (hi) es la fracción del total que representa cada valor de la variable.

El **porcentaje** de la variable analizada se obtiene al multiplicar por 100 a la variable relativa.

¡A PENSAR!

En una encuesta, hecha a 30 alumnos del curso, sobre la práctica de deportes se obtuvieron las siguientes respuestas:

	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi) $hi = \frac{fi}{n}$	Porcentaje $\% = hi . 100$
Practican deportes	19	$\frac{19}{30} = 0,6\widehat{3}$	$63,\widehat{3}$
No practican deportes	11	$\frac{11}{30} = 0,3\widehat{6}$	$36,\widehat{6}$
Total (n)	30	1	100

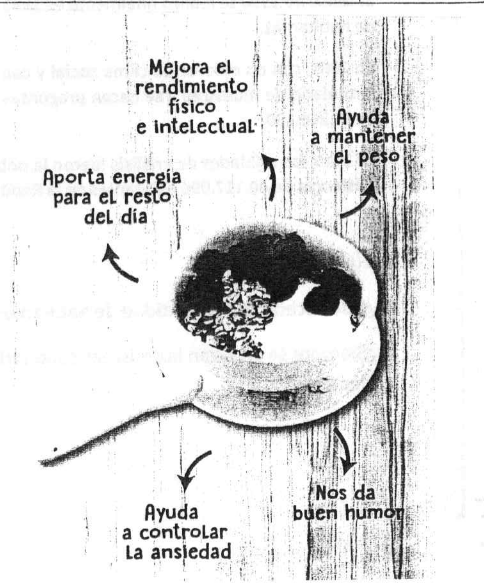
4. Luego de una clase de biología, donde se trabajó sobre alimentación saludable, los alumnos descubrieron que el desayuno es la principal comida del día y es muy importante que sea nutritivo y no se saltee. Un grupo de ellos realizó una encuesta a los 120 alumnos de la secundaria sobre si realizaban el desayuno habitualmente o lo evitaban. Los resultados obtenidos fueron:

- 45 alumnos respondieron que habitualmente desayunaban.
- 20 alumnos dijeron que a veces lo hacían.
- El resto respondió que nunca desayunaban.

a. Realicen un cuadro que incluya la frecuencia absoluta, relativa y el porcentaje.

b. Indiquen cuál es la moda.

c. Clasifiquen la variable.



Gráficos estadísticos

Cuando tenemos mucha información para analizar, luego de hacer una encuesta o relevamientos de datos, es muy útil organizarla y volcarla en gráficos. Existe una gran cantidad de gráficos para representar datos estadísticos.

Gráficos de barras

Está constituido por barras rectangulares de igual ancho, conservando la misma distancia de separación entre sí.

Para elaborarlo, debemos utilizar un sistema de coordenadas cartesianas. Construimos los rectángulos tomando como base al eje de las abscisas, y las alturas quedarán determinadas por las diferentes frecuencias que presentan las variables en estudio.

Ejemplo:

Se hizo una encuesta en los segundos años sobre el deporte preferido de los alumnos, obteniéndose los siguientes datos.

Fútbol	15 alumnos
Natación	5 alumnos
Vóley	3 alumnos
Patín	10 alumnos
Otros deportes	7 alumnos

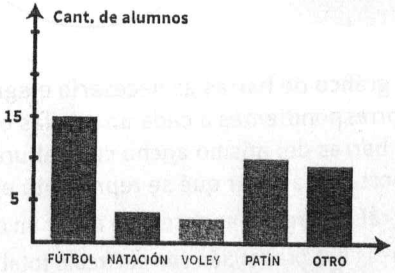
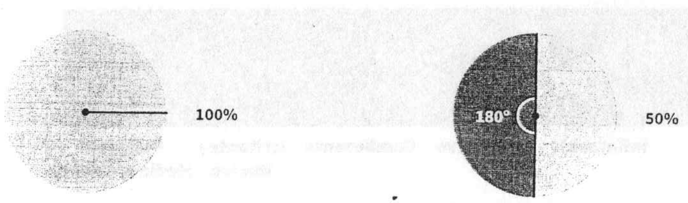


Gráfico de sectores circulares

Este tipo también es conocido como gráfico de torta, debido a su forma característica de una circunferencia dividida en partes. Se usa para representar variables cualitativas en porcentaje o cifras absolutas cuando el número de ítems no es superior a cinco.

Para calcular cada porción de la torta, se aplica la proporcionalidad directa, a mayor porcentaje, mayor ángulo central.

Por ejemplo:



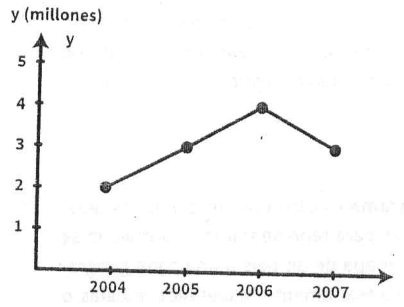
100% le corresponde un ángulo central de 360°. Al 50% un ángulo central de 180°.

%	100	10	75	25	15
Ángulo	360°				

Gráfico de líneas o tendencias

Se utiliza para mostrar el comportamiento de una variable cuantitativa a través del tiempo. Ejemplo:

El gráfico muestra la cantidad (expresada en millones) de autos vendidos en una determinada región entre los años 2004 y 2007.



5) Realicen una encuesta entre 30 compañeros de diferentes cursos, consultándolos sobre el uso de cinturón de seguridad.

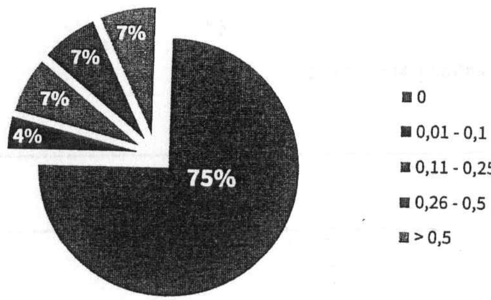
Lo uso	Siempre	A veces	Nunca

Realicen una tabla de frecuencia, luego calculen la moda y hagan un gráfico de barras que muestre la situación real.

6) Una de las causas de accidentes de tránsito es el consumo indebido de alcohol que genera, pérdida de los reflejos y desinhibición, entre otras cosas, lo que hace que el conductor sienta una falsa sensación de seguridad, que lo lleva a ser imprudente en sus decisiones tras el volante.

El siguiente gráfico refleja los porcentajes obtenidos en los controles a conductores particulares por rango. Recordemos que por rango entendemos los intervalos de graduación alcohólica, que son cuatro:

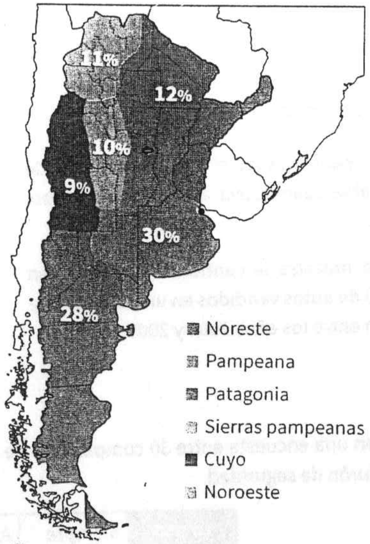
- 0,01 g/L a 0,1 g/L
- 0,11 g/L a 0,25 g/L
- 0,26 g/L a 0,5 g/L
- más de 0,5 g/L



a. ¿Qué porcentaje de personas dieron positivo al test?

b. En total, se realizaron 6622 controles. Indiquen qué cantidad de personas superaron el 0,26 g/L de alcohol en sangre. La ley vigente establece como límite permitido para manejar un vehículo particular 0,5 gramos de alcohol por litro de sangre, para motociclistas 0,2 y para conductores profesionales el límite es 0 gramo por litro.

El mapa muestra los porcentajes de turistas registrados en el último fin de semana largo. Sabiendo que el total de turistas fue de 1.500.000, se pide que construyan una tabla de frecuencias y calculen el promedio de turistas por región. ¿Se puede considerar que el valor encontrado es significativo? ¿Por qué?

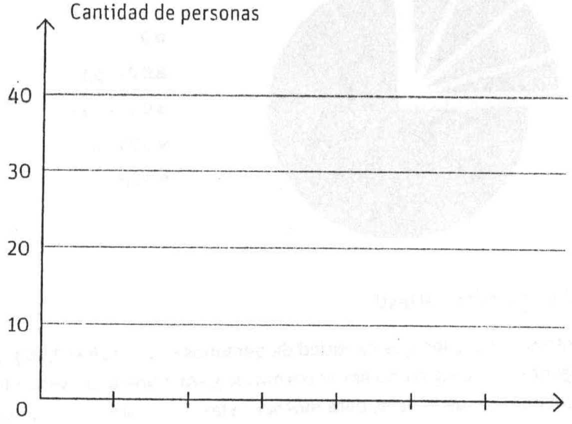


El **cartograma** es otro tipo de gráfico estadístico, donde para representar la información se utiliza un mapa de un país o una zona geográfica, no necesariamente respetando escalas o proporciones.

Construcción de gráficos

7. Se realizó una encuesta a un grupo de personas acerca de cómo es el servicio de Internet en los celulares. Los datos se volcaron en esta tabla. Realizá un gráfico de barras.

Opinión	Muy malo	Malo	Aceptable	Bueno	Muy bueno
Cantidad de personas	36	20	13	17	22



8. Mariana tiene 8 primos y primas. Le preguntó a cada uno cuál es el género musical que más le gusta y lo anotó de la siguiente manera. Realizá un gráfico circular que represente los porcentajes de cada género musical. Aclará el porcentaje de cada sector circular y a qué género pertenece; podés usar colores.

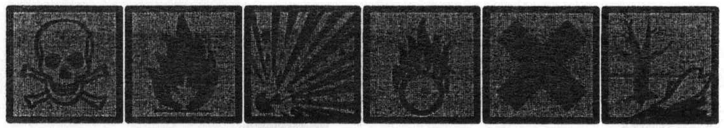
Pop internacional: Julia y Tomás.
Cumbia: Sol, Andrea, Donato y Benjamín.
Jazz: Mara.
Música clásica: Sofía.

Para trazar un gráfico de barras es necesario elegir una escala en el eje vertical que permita marcar los números correspondientes a cada una de las opciones de la información a representar. Luego, hay que trazar barras del mismo ancho cuya altura sea igual al valor correspondiente a cada opción. Es importante aclarar qué se representa en cada eje.

Para **trazar un gráfico circular** es necesario trazar un círculo y marcar su centro. Luego hay que dividir el círculo en sectores cuya proporción con el círculo total sea igual al porcentaje a representar. Por ejemplo, para trazar el 25%, que es $\frac{1}{4}$ del total, hay que pintar $\frac{1}{4}$ de círculo.

Para obtener el ángulo del sector circular que representa a un porcentaje hay que considerar que la proporción entre el ángulo y 360° debe ser igual a la proporción entre el porcentaje y 100. Por ejemplo, el ángulo para el 30% es aquel que al dividirlo por 360° da $\frac{30}{100}$, que es 108°.

9. Los siguientes logos están directamente relacionados con la seguridad de los ciudadanos y cuyo conocimiento es esencial.



Tóxico | Inflamable | Explosivo | Comburente | Irritante / Nocivo | Peligroso Medio ambiente

Estos logos advierten sobre la peligrosidad de ciertos productos, como por ejemplo los que pueden provocar efectos adversos en la salud (tóxico); los que se inflaman por efecto de calor o fricción (inflamable); los que pueden explotar al contacto con una llama (explosivo); o aquellos que pueden alterar o dañar gravemente el ecosistema. En la siguiente tabla, se muestra el nivel de conocimiento de 30.000 habitantes de una zona urbana y 10.000 habitantes de zona rural sobre estos símbolos.

Leer e interpretar gráficos estadísticos

Para entender algunos estudios estadísticos es necesario saber interpretar gráficos que, a veces, se encuentran uno en relación con otro.

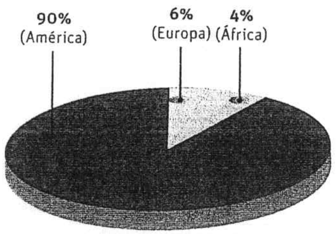
Consideremos la siguiente situación:

Una empresa presenta los siguientes gráficos correspondientes a exportaciones de sus productos en el año 2017.

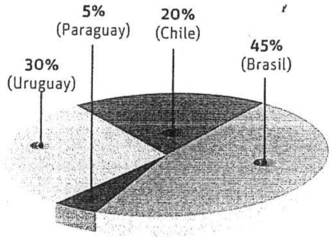
Exportaciones en 2017

Destino	Dinero (en dólares)
América	43.584.772
Europa	3.140.396
África	2.180.418
Resto	59.133

Exportaciones según destino



Exportaciones en América



Los porcentajes del primer gráfico circular no son exactos. Esto se observa al sumar los porcentajes del gráfico, que da el 100%, mientras que el porcentaje correspondiente al monto de la última fila de la tabla no está representado en el gráfico. Esto sucede porque, en general, los porcentajes se redondean y los valores menores del 1% no se grafican.

Al observar el segundo gráfico circular, vemos que está referido a uno de los sectores circulares del primer gráfico: el de América. Por eso hay que tener en cuenta que los porcentajes del segundo gráfico no se refieren al total del dinero de las exportaciones, como sucede en el primer gráfico, sino que el 100% es el monto de los productos exportados a América. Por ejemplo, el 30% correspondiente a Uruguay es un porcentaje de la cantidad de exportaciones a América, que es el 90% de las exportaciones totales de la empresa.

Realizar y analizar un estudio estadístico

Para realizar un estudio estadístico, primero hay que elegir el **tema** que se estudiará y seleccionar las mejores **preguntas** para obtener información relevante y concreta.

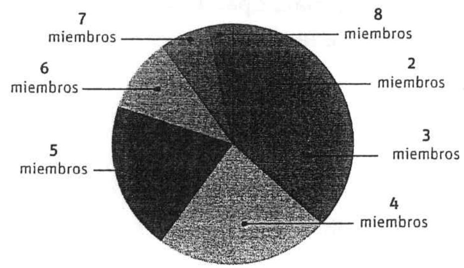
Supongamos que se quiere estudiar cómo están conformadas las familias de los alumnos de un curso. Se puede preguntar cuántos hermanos tienen, si viven con ambos padres, cuántos miembros tiene su familia. Algunas preguntas tienen respuesta numérica y otras no. Al analizar datos numéricos son útiles las herramientas matemáticas que han estudiado.

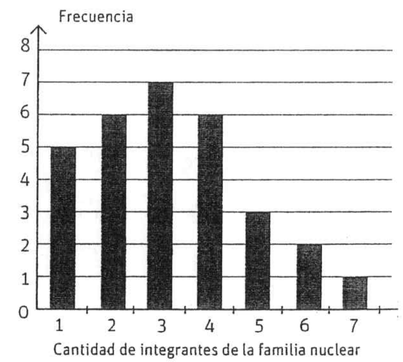
Después, hay que **recolectar la información** mediante la consulta a un grupo de personas, que puede ser la población entera o una muestra representativa de esta. En la situación que estamos analizando, consultamos a un curso, un grupo de 30 chicos. Les preguntamos con cuántos familiares conviven. Se anota y luego se arma una tabla de frecuencias.

2	5	5	4	3	3	8	6	5	2	4	3	2	4	5
3	4	5	4	3	6	2	7	4	6	2	5	4	7	3

Cantidad de integrantes de la familia nuclear	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	5	6	7	6	3	2	1

Después se puede realizar un gráfico circular o de barras para mostrar la información.





Podemos obtener las medidas de tendencia central: el promedio es 4,2; la mediana y la moda valen 4. Como son valores cercanos, podemos decir que son confiables para caracterizar la cantidad de integrantes de la familia nuclear de los chicos de ese curso.

Encuesta - Grado de conocimiento				
Denominación	Comunidad urbana		Comunidad rural	
	Conoce	Sabe	Conoce	Sabe
Tóxico	92,80 %	84,50 %	94,80 %	90,50 %
Inflamable	95,70 %	88,50 %	95,10 %	91,10 %
Explosivo	32,50 %	28,50 %	34,20 %	29,00 %
Comburente	38,60 %	29,60 %	47,30 %	29,90 %
Irritante / Nocivo	77,30 %	44,80 %	72,30 %	41,50 %
Peligroso Medio ambiente	32,90 %	25,30 %	43,50 %	28,50 %

a. Indiquen en cada caso la frecuencia correspondiente.

b. ¿Cuál podría ser motivo en la diferencia de porcentajes en cada tipo de zona?

c. Realicen una encuesta a sus familias sobre si conocen y si saben qué significan cada uno de esos símbolos. En clase, unan todos los resultados y confeccionen una tabla de distribución de frecuencias absolutas y porcentuales. ¿Qué sucede con los porcentajes? ¿Se asemejan a los de la tabla de la actividad?

10. El salario que percibieron 21 albañiles por un día de trabajo fue: 1210; 1440; 2050; 1530; 1210; 1260; 1280; 1300; 2130; 1480; 1310: 1440; 1390; 1340; 1350; 1470; 1410; 1440; 1330; 1370, 1440.

a. Calculen el salario promedio diario de un albañil.

b. ¿Cuál es la moda ~~en este~~ caso? Interpreten el resultado en el contexto de esta situación.

c. ¿Cuál es el salario que no es superado por el 50% de los albañiles de la muestra?

Una interpretación para esta situación es que el salario diario del 50% de los albañiles no supera a 1390. En el caso de que el tamaño de la muestra sea par, se realiza la semisuma de los dos valores centrales. Por ejemplo, al ordenar las edades de 8 personas obtenemos: 4; 6; 8; 9; 10; 17; 21; 25, los valores centrales son 9 y 10, los sumamos 9 + 10 = 19 y a este resultado lo dividimos por 2. Por lo tanto la mediana es 9,5. Como podemos observar, hay cuatro valores que no superan 9,5 y otros cuatro valores que lo superan.

Medidas de tendencia central

11. Elena toma una prueba. Estas son las calificaciones de sus alumnos.

3	4	4	4	5	5	5	6	6	6
7	7	7	7	8	8	9	9	10	10

a. Calculá la nota promedio de esa evaluación.

b. Las notas están ordenadas. ¿Qué nota está en el medio? __________

c. ¿Cuál es la nota que obtuvo la mayoría de los alumnos? __________

Para dar una idea general de un conjunto de datos es necesario encontrar un valor que los represente, es decir una **medida de tendencia central**. En Estadística hay tres valores que cumplen esa función: el promedio, la mediana y la moda.
El **promedio** o **media** es el valor que indica el centro de un conjunto de datos. Se calcula sumando todos los valores y dividiendo el resultado por la cantidad de datos.
La **mediana** es el valor que está en el medio de los datos al ubicarlos ordenados de menor a mayor.
La **moda** es el valor que más se repite en el grupo de datos.

12. Se consultaron las alturas (en metros) de un grupo de personas. Resolvé las consignas en la carpeta.

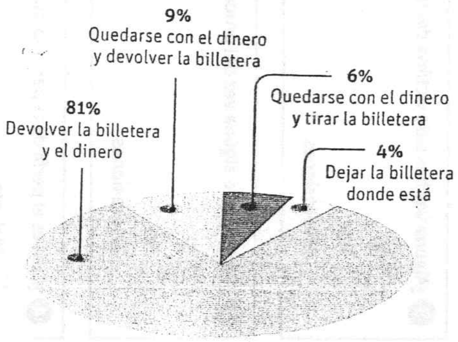
1,83	1,70	1,65	1,62	1,80	1,49	1,65	1,71	1,77	1,71
1,72	1,56	1,70	1,60	1,69	1,72	1,57	1,62	1,59	1,75
1,69	1,55	1,63	1,59	1,82	1,82	1,70	1,53	1,75	1,63

a. Calculá el promedio, la mediana y la moda.
b. Explicá qué significa cada medida central en el contexto de la situación.
c. ¿Cuál es la medida central más representativa?

El promedio no es **representativo** de un grupo de datos cuando hay mucha diferencia entre ellos. Para estos casos, la mediana es el valor más apropiado para representar el conjunto de datos. Si estos dos valores están próximos, entonces son **confiables** para caracterizar a esos datos.
La moda es representativa cuando los valores de los datos no son numéricos.

Me pongo a prueba

1. Se realizó una encuesta a 429 jóvenes de entre 13 y 17 años que asistían al turno mañana de las escuelas secundarias del centro de la ciudad de Rosario, en Santa Fe, un día del año escolar. Se les preguntó qué harían si hallaran una billetera tirada, dándoles 4 posibles respuestas. El gráfico muestra los resultados.



   a. Completá la tabla.

Respuesta	Frecuencia	Frecuencia relativa
Devolver la billetera y el dinero		
Quedarse con el dinero y devolver la billetera		
Quedarse con el dinero y tirar la billetera		
Dejar la billetera donde está		

   b. Los valores de la frecuencia que obtuviste, ¿son los valores reales? ¿Por qué pensás que sucede eso?

   c. Realizá un gráfico de barras que represente las frecuencias aproximadas.

2. Se consultó a un grupo de 45 estudiantes acerca de cuánto tiempo tardaban en llegar desde su casa a la escuela. Los resultados fueron que 12 estudiantes tardan 10 minutos, 19 demoran 5 minutos, y el resto, 20 minutos.

   a. ¿Cuál es la moda?

   b. Calculá el promedio y la mediana.

   c. Decidí cuál de los tres valores te parece más representativo del conjunto de datos.

3. Se le pregunta a un grupo de personas cuánto dinero (en pesos) invierte en sus gastos fijos mensuales. Las respuestas son las siguientes.

600	600	700	760	760	780	780
820	900	920	980	980	980	980
1.000	1.020	1.020	1.020	1.040	1.060	1.060
1.080	1.120	1.120	1.120	1.140	1.160	1.180
1.200	1.240	1.260	1.260	1.280	1.360	1.360
1.360	1.380	1.380	1.380	1.400	1.580	1.580
1.600	1.640	1.640	1.660	1.740	1.780	1.800
1.980	1.990					

   a. ¿Qué valor representa la moda?

   b. ¿Cuál es el gasto promedio de las respuestas recolectadas?

   c. Indicá cuál es la mediana.

   d. Escribí cuál te parece que es el valor central que mejor representa a este conjunto de datos.

4. En una fábrica de 1.500 trabajadores se quiere hacer una encuesta. Si hay 1.200 operarios y 300 ejecutivos, ¿cuántos operarios debería tener una muestra de 50 trabajadores para que resulte representativa?

5. Una cadena de supermercados desea conocer las preferencias de sus clientes en el consumo de vegetales y realiza una encuesta a los clientes un sábado entre las 9 y las 11.

   a. En esta situación, ¿el elemento que se estudia es una población o una muestra?

   b. Escribí tres preguntas con respuesta numérica que ayuden a evaluar las preferencias de los clientes del supermercado.

   c. ¿Por qué son útiles las respuestas numéricas?

   d. ¿Las respuestas serán representativas también para las personas que suelen hacer las compras por la noche? ¿Por qué?

6. En una empresa chica, 4 empleados cobran \$36.000; otros 3, \$20.000 y 3 más, \$14.000.

   a. ¿Cuál es el sueldo promedio del grupo de empleados?

   b. Calculá la mediana y la moda.

   c. ¿Cuál de los tres valores centrales es el que mejor representa los sueldos?

7. La siguiente tabla contiene información sobre los continentes y su área expresada en km².

Continente	km²
Asia	43.810.000
América	42.330.000
África	30.370.000
Antártida	10.180.000
Europa	10.180.000
Oceanía	9.008.500

a. Calculen el porcentaje correspondiente a cada continente.

b. Vuelquen la información en un gráfico circular y de barras.

c. ¿Cuáles son las variables analizadas?

d. ¿Cuál es la superficie total del planeta ocupada por los continentes? Expresen este resultado en m².

e. Pasen a notación científica el resultado anterior.

8. Investiguen sobre la composición de la población indígena de Argentina y completen:

Pueblo originario	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
Mapuches			
Collas			
Tobas			
Wichís			

a. Construyan un gráfico con la información obtenida.

b. ¿Cuáles son las variables analizadas? Clasifíquenlas.

c. Investiguen cómo evolucionaron a lo largo de los últimos 100 años estos pueblos (número de habitantes, superficie de tierras que ocupan, etc.). Compartan sus respuestas con la clase.

ENCUESTA SOBRE EL BULLYING

Entrevistado: ☐ Edad: ☐

1 ¿Sabés qué es el bullying?
- ☐ Sí
- ☐ No
- ☐ Tal vez

2 ¿Qué información tienes sobre el bullying?
- ☐ Mucha
- ☐ Poca
- ☐ Nada

3 ¿Alguna vez has sido víctima del bullying?
- ☐ Sí
- ☐ No
- ☐ En ocasiones

4 ¿Participaste alguna vez del proceso de bullying?
- ☐ Sí
- ☐ No
- ☐ En ocasiones

4 ¿Cuál es el perfil de la persona que ocasiona bullying?
- ☐ Violento
- ☐ Cariñoso
- ☐ Tranquilo

S1