Cuadernillo de matemática

Escuela Normal
"José Mª Torres"
FHCSyA - UADER

Cuarto año

Divisiones: 1ra, 2da, 3ra, 4ta, y 5ta

INTRODUCCIÓN

El presente cuadernillo surge con el objetivo de brindar una herramienta de acompañamiento y apoyo al proceso de aprendizaje de los estudiantes que ingresan al cuarto año del ciclo orientado de nuestra institución, retomando saberes previos del CBC y profundizando los mismos mediante distintas actividades propuestas.

La riqueza de este material radica en que, a partir de consensos entre docentes del espacio a cargo de cursos en ambos ciclos, se han integrado conceptos previos claves, datos históricos, actividades y estrategias que consideramos primordiales y relevantes al momento de ingresar y durante el cursado del cuarto año de la educación secundaria, facilitando así la articulación con el nuevo conocimiento, propio del ciclo que inician, y el de potenciar el desarrollo de las habilidades matemáticas de nuestros estudiantes, independientemente de la modalidad elegida.

Nuestro trabajo diario es brindarnos a cada uno de los estudiantes, siendo el nexo entre ellos y el conocimiento.

Profesoras:

- *Boxler, Roxana*
- *Caffaro, Lidya*
- *Cian, Andrea*
- *Martínez, Andrea*
- *Hischfeld, Luján*

Campos numéricos

En este apartado haremos un breve recorrido y revisión de los campos numéricos conocidos, junto con las operaciones y propiedades que las mismas cumplen o no según el conjunto numérico que estemos abordando.

NÚMEROS NATURALES (N)

Los hindúes fueron los primeros en desarrollar un sistema práctico de notación numeral, tras haber descubierto el cero y el valor posicional de las cifras.

Ese sistema fue dado a conocer en Europa por los árabes, en el siglo VII d.C. y de allí que las cifras que se utilizan en la actualidad se llamen indo arábigas.

Aunque el cero fue descubierto por los hindúes, la palabra cero proviene de la voz árabe ziffero, que significa lugar vacío.

Propiedades:

Propiedad	Adición	Sustracción	Producto	Cociente	Potenciación	Radicación
Clausura	Si a,b ϵ **N** ⇒ a+b ϵ **N**	No cumple	Si a,b ϵ **N** ⇒ a+b ϵ **N**	No cumple	Se cumple si consideramos N, si se trata de N_0 (naturales incluido el cero) no se cumple	No cumple
Asociativa	Si a,b,c ϵ **N** ⇒ (a+b)+c=a+(b+c)	No cumple	Si a,b,c ϵ **N** ⇒ (a*b)*c=a*(b*c)	No cumple	No cumple	No cumple
Conmutativa	Si a,b ϵ N ⇒ a+b=b+a	No cumple	Si a,b ϵ N ⇒ a*b=b*a	No cumple	No cumple	No cumple
Existencia de elemento neutro	Si a ϵ N ⇒ a+0 = 0+a= a	No cumple	Si a ϵ N ⇒ a*1= 1*a= a			
Uniforme	Si a,b,c ϵ N ∧ a = b ⇒ a+c= b+c		Si a,b,c ϵ N ∧ a = b ⇒ a*c= b*c			

Propiedad cancelativa (suma):

a) Si en ambos miembros de una igualdad figuran términos iguales, se pueden cancelar y se sigue teniendo una igualdad.

b) Si en un cálculo hay un término que está sumando y el mismo está restando se pueden cancelar.

Suma algebraica:

Se llama así a toda combinación de sumas y restas.

Regla Práctica: Se efectúan todas las cancelaciones posibles y luego a la suma de los números que están sumando se le resta la suma de los números que están restando.

Supresión de paréntesis:

- Todo paréntesis precedido por el signo + puede suprimirse dejando todos los términos que están dentro de él con sus respectivos signos.
- Todo paréntesis precedido por un signo menos puede suprimirse cambiando los signos de todos los términos que estén dentro de él.

Supresión de paréntesis corchetes y llaves:

Se suprimen primero los paréntesis, después los corchetes y por último las llaves, y luego se resuelve la suma algebraica que queda. Es conveniente efectuar todas las cancelaciones posibles y luego aplicar la regla práctica.

Practicamos…

1) Agrupa y conmuta los sumandos en forma conveniente para calcular estas sumas.

a) 700 + 1 + 300 + 99 =

b) 350 + 27 + 3 + 50 =

c) 1999 + 33 + 1 + 77 =

2) Sabiendo que a+b= 5 y a+d= 7, calcula cada una de las siguientes operaciones aplicando las propiedades conmutativa y asociativa.

a) (a+1) + (b+d) + (a+4) = Rta: 17

b) (a+d) +a+ (d+b)+a = Rta: 19

c) (b+3+d) +(2+a) + (a+1) = Rta.:18

d) (d+a+1)+(b+d) + (a+3)+ (a+1) = Rta.: 24

3) Resuelve las siguientes sumas algebraicas aplicando la regla práctica

a) 8-2+3-1+4-3+2-1-1-6= Rta: 3

b) 9-2-3+5+2-1+10-4+5-6+2 Rta; 17

c) 8-2+4-7+3-4+4-1+6 Rta: 11

d) 9-5+1-3+5-2-1-1+4 Rta.: 7

Divisibilidad

Los múltiplos de un número natural son los números naturales que resultan de multiplicar ese número por otros números naturales.

Decimos que un número es múltiplo de otro si le contiene un número entero de veces.

Los divisores de un número natural son los números naturales que le pueden dividir, resultando de cociente otro número natural y de resto 0.

Número primo es el número natural que solamente tiene de divisores a él mismo y al número 1

Número compuesto es el número natural que se le puede obtener como producto de números primos.

1)Une con flechas los elementos de la primera columna que sean divisibles por los de la segunda columna:

24	5
12	3
35	17
85	6

2) Contesta verdadero o falso. Justificar.

a) La suma de dos números primos es a veces un número primo

b) El producto de dos números primos es un número primo

c) La suma de dos números impares es un número par

Descomponer un número en factores es ponerlo como producto de factores primos.-

Para descomponer en factores un número lo dividimos por el primer número primo que podamos.

- El cociente que haya resultado lo colocamos bajo el número.
- Si podemos seguimos dividiendo sucesivamente ese cociente por el mismo número primo.
- Cuando no podamos hacer la división por ese número primo lo hacemos por el siguiente primo que se pueda.
- Así sucesivamente hasta que el cociente final sea 1.
- Finalmente ponemos ese número como un producto de potencias de factores primos.

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$144=2^4.3^2$$

El **mínimo común múltiplo** de varios números es el número más pequeño que es múltiplo de todos esos números, sin considerar el 0.

Obtención del mínimo común múltiplo

Para obtener el **m.c.m.** de dos o más números en primer lugar los descomponemos en factores primos, después hacemos el producto de los factores comunes y no comunes elevados a su mayor exponente.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 54 = 3^3 \cdot 2$

m.c.m.(54,60) $= 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5 = 540$

El **máximo común divisor** de varios números es el número más grande que es divisor de todos esos números.

Obtención del máximo común divisor

Para obtener el máximo común divisor de varios números los descomponemos en factores primos, y multiplicamos solamente los factores comunes elevados al exponente menor.

Continuando con el ejemplo anterior

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 54 = 3^3 \cdot 2$$

$$\text{m.c.d.}(54,60) = 3 \cdot 2 = 6$$

Criterios de divisibilidad

Para saber si un número es divisible por algún otro número utilizamos los llamados criterios de divisibilidad. Son estos:

- **Divisibilidad por 2**: un número es divisible por dos si termina en cero o en cifra par.
- **Divisibilidad por 3**: un número es divisible por tres, si la suma de sus cifras es múltiplo de tres.
- **Divisibilidad por 4**: las dos últimas cifras tienen que ser dos ceros o un número múltiplo de 4.
- **Divisibilidad por 5:** un número es divisible por cinco cuando acaba en cero o en cinco.
- **Divisibilidad por 6:** tiene que ser divisible por 2 y por 3.
- **Divisibilidad por 9**: un número es divisible por nueve cuando la suma de sus cifras es múltiplo de nueve.
- **Divisibilidad por 10**: tiene que terminar en cero. De manera similar, si termina en 00 es divisible por 100; si termina en 000 es divisible por 1000.
- **Divisibilidad por 11**: un número es divisible por once cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupa la posición par y la suma de las cifras que ocupan la posición impar son múltiplo de once.

Actividades:

1) Descompone en factores primos los números siguientes:

a) 48	e) 225	i) 840
b) 120	f) 360	j) 210
c) 196	g) 405	k) 144
d) 240	h) 420	l) 1260

2) Obtén 5 múltiplos cualesquiera de los números siguientes:

a) 4	d) 10	g) 100
b) 6	e) 12	h) 125
c) 8	f) 25	i) 240

3) Completa los huecos con la palabra múltiplo o divisor:

a) 25 es ……….. de 5	b) 60 es ……….. de 120
c)16 es ……… de 8	d) 11 es ……… de 33
e) 100 es ……… de 25	f) 7 es ……….. de 63
g) 333 es …..de 4	h) 343 es ….. de 7

4) a) Busca un múltiplo de 26 comprendido entre 300 y 350.

b) Busca todos los múltiplos de 15 comprendidos entre 151 y 200.

5) Calcula:

a) M.C.D. (72, 108)

b) M.C.D. (270, 234)

c) m.c.m. (72, 108)

d) m.c.m. (270, 234)

e) M.C.D. (560, 588

f) M.C.D. (210, 315, 420)

g) m.c.m. (560, 588)

h) m.c.m. (210, 315, 420)

6) Resuelve el siguiente crucinúmero

Horizontales

1- Número múltiplo de 4, 5, y 10 simultáneamente comprendido entre 9 y 21.

2- El mayor número primo de un dígito

3- Número múltiplo de 2, 3 y 4 simultáneamente, mayor que 310 y menor que 320.

4- Divisor impar de 40 mayor que 1.

5- El mayor divisor par de 20, menor que 10.

6- Número múltiplo de 7 y 11 simultáneamente, comprendido entre 70 y 80.

Verticales

1- El mayor número múltiplo de 2 y 4 simultáneamente comprendido entre 202 y 225

7- El número anterior impar a 95

8- El número formado por tres dígitos iguales y pares, múltiplos de 2 y 3 simultáneamente, comprendido entre 100 y 300

1			2	
		7		8
		3		
	4			

NÚMEROS ENTEROS (Z)

Enteros: Z+ = 1;2;3;..... ; Z- = 1; 2; 3;..... Z= Z+ 0 + Z -

OPERACIONES EN Z

ADICIÓN

*Dos nº del mismo signo se suman y el resultado lleva el signo de los sumandos

Ej: 2 + 4 = 6 (-2) + (-4) = -6

*Dos nº de distinto signo, se restan sus valores absolutos, y lleva el signo del nº de mayor valor absoluto.

Ej: 2 +(-3) = -1 -5 + 6 = 1

Propiedades de la adición:

- **De clausura**: la suma de dos nº enteros es otro nº entero; $a \in Z, b \in Z \Rightarrow (a+b) \in Z$.
- **Asociativa:** dados dos o más nº enteros ,la suma final no varía si se reemplazan varios sumandos por su suma ya efectuada. Si $a \in Z, b \in Z, c \in Z \Rightarrow a+b+c = a+(b+c) = (a+b)+c$
- **Conmutativa:** el orden de los sumandos no altera el resultado.$a \in Z, b \in Z \Rightarrow a+b = b+a$
- **Existencia del elemento neutro:** el cero, que sumado a la derecha o izquierda de cualquier nº entero no altera la suma: $a + 0 = 0 + a = a$
- **Existencia del elemento opuesto:** todo elemento del conjunto Z admite un opuesto o simétrico, tal que sumado a derecha o a izquierda del nº dado da por resultado el elemento neutro:
  $a \in Z, (-a) \in Z \Rightarrow a+(-a) = (-a)+a = 0$
- **Prop. uniforme:** si a ambos miembros de una igualdad se les suma un mismo número entero se obtiene otra igualdad: $a \in Z, b \in Z, c \in Z \Rightarrow: a = b \Rightarrow a+c = b+c$
- **Ley cancelativa:** todo sumando que aparece en ambos miembros de una igualdad puede ser cancelado conservando la igualdad. $a \in Z, b \in Z, c \in Z \Rightarrow: a+c = b+c \Rightarrow a = b$

SUSTRACCIÓN

Para restar, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ej: $5 - (-6) = 5 + (+6) = 11$ $-4 - (+2) = -4 + (-2) = -6$

Propiedades de la sustracción:

La sustracción cumple con las propiedades de clausura, uniforme y cancelativa.

MULTIPLICACIÓN

Se multiplican los módulos de los factores y se aplica la regla de los signos:

+ . + = +

+ . - = -

- . + = -

- . - = +

La regla anterior se puede reducir a:

- Si se multiplican dos números enteros de igual signo, el producto es de signo positivo.
- Si se multiplican dos números enteros de signos distintos, el producto será negativo.

Ej: $5 . (-2) = -10$ $(-6). (-3) = 18$

DIVISIÓN

Se dividen los módulos de los números y se aplica misma la regla de signos que en la multiplicación

Ej: $(-35) : (-7) = 5$ $144 : (-12) = -12$

Propiedades de la multiplicación y de la división:

Propiedad	¿Se cumple en la multiplicación?	¿De cumple en la división?
Conmutativa	Si. -3.4= 4.(-3) -12= -12 a.b=b.a	No 10: (-2)≠ (-2) :10 -5 ≠ -0,2 a:b≠b:a
Asociativa	Si $[(-4).2](-5) = (-4).[2.(-5)]$ (-8).(-5) = (-4).(-10) -40=-40 (a.b).c = a.(b.c)	No $[(-8):(-4)]:2 \neq (-8):[(-4):2]$ 2:2≠(-8) : (-2) 1≠ 4 (a:b):c≠ a:(b:c)
Elemento neutro	Si el 1 -5.1= -5 a.1= a	Solo como divisor 4:1=4 a:1=a
Elemento absorbente	Si el 0 9.0= 0 a.0=0	Solo el dividendo: el 0:8= 0 0:a= 0 La división por 0 no tiene solución
Prop. distributiva	Si (-4+3-2).(-2)= -4.(-2)+3.(-2)-2.(-2)= 8+(-6)-(-4)= 8-6+4=6 (a+b-c) .d= a.d+b.d-c.d	Solo a derecha (8-4) :2= 8:2-4:2 4:2=4-2 2=2 (a+b).c= a.c+b.c 10:(5+5)≠10:5+10:5 10:10≠2+2 1≠4 a: (b+c)≠a:b+a:c

POTENCIACIÓN

La potenciación es una multiplicación de factores iguales

$$2^5 = 2.2.2.2.2$$

En símbolos

$$\underbrace{a^n = a.a.a....a}_{\text{n veces}}$$

donde a se llama base y n se llama exponente.

Las potencias con exponente par dan siempre como resultado números positivos:

EJEMPLO: $3^2 = 9$ Y $(-3)^2 = 9$

Las potencias con exponente impar tienen como resultado un número cuyo signo es igual al de la base.

EJEMPLO: $3^3 = 27$ Y $(-3)^3 = -27$

RADICACIÓN

Para sacar la raíz de un cierto número (radicando), buscamos el número que elevado al índice me de por resultado el radicando.

$$\text{índice}\leftarrow 3\sqrt{\underbrace{8}_{\text{radicando}}} = \underbrace{2}_{\text{raíz}} \quad \text{porque} \quad 2^3 = 8$$

REGLAS DE LOS SIGNOS DE LA RADICACIÓN

a) Si el índice es PAR entonces el radicado TIENE que ser POSITIVO y la raíz tiene dos resultados, uno positivo y otro negativo, para este nivel usamos el resultado positivo.

EJEMPLO:

$$\sqrt{16} = \pm 4 \quad \textit{porque} \quad \begin{cases} 4^2 = 16 \\ (-4)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\sqrt{-16} \text{ no se puede hacer porque} \begin{cases} 4^2 = 16 \\ (-4)^2 = 16 \end{cases} \text{ nunca va a dar negativo.}$$

b) Si el índice es IMPAR entonces la raíz va a tener el mismo signo que el radicando.

EJEMPLO:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \textit{porque } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \textit{porque } (-2^3) = -8$$

Actividades

1) Ubicar en una recta numérica todos los números enteros que se encuentren entre el –4 y su opuesto inclusive. Luego responde:

a) ¿ Cuáles de los números que marcaron son naturales?

b) ¿Cuáles son enteros?

c) ¿Cuántos números enteros hay entre –3 y el 2?

d) ¿Cuántos números enteros hay entre el –3 y el –2?

e) ¿Cuáles son el anterior y el siguiente del 0?

2) Completar el cuadro

Número **n**	**Siguiente** **n+1**	**Anterior** **n-1**	**Opuesto** **-n**	**Valor absoluto** **n**
12				
		-2		
			5	
	-25			

3)

Resuelve las siguientes adiciones. Luego completa las frases escribiendo el valor absoluto de los resultados que obtengas.

a) (−3) + (+10) =

b) (−12) + (−8) =

c) (+18) +(+17) =

d) (−14) + (−16) =

e) (−21) + (+14) =

f) (+96) + (−36) =

g) (−8) + (−9) + (+10) =

h) (+12) + (−15) + (+28) =

i) (−15) + (−5) + (+10) =

j) (+14) + (−17) + (+2) =

k) (−9) + (−16) + (+19) =

l) (+42) + (−48) + (+9) =

a) La víbora de la cruz es una de las ______ especies venenosas que se conocen con el nombre de Yarará.

b) Los murciélagos duermen ______ horas por día.

c) Los pingüinos se clasifican en ______ especies distintas.

d) Existen ______ mil especies de arañas.

e) Los horneros tardan hasta ______ días en construir su nido.

f) Las urracas vuelan a ______ km/h.

g) Las ardillas llegan a tener hasta ______ crías por vez.

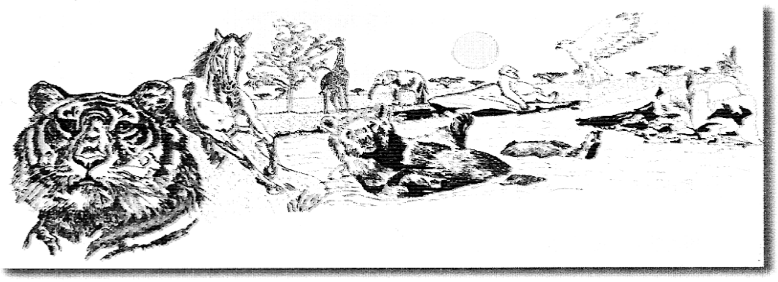
h) Los ciervos rojos viven hasta ______ años.

i) En el mundo existen alrededor de ______ millones de animales diferentes.

j) Una trucha adulta puede medir hasta ______ m de longitud.

k) El serpentario es un ave de algo más de 1m de altura que es inmune al veneno de las serpientes. Hace su nido en los árboles, a ______ m de altura.

l) Los leones, desde la cabeza hasta el extremo de la cola, suelen medir ______ m y pesan 250 kg.



4) Completar las siguientes proposiciones para que resulten verdaderas:

a) Si a.b = -12 y a=3 Entonces b = ...

b) Si a:b = 4 y a=-20 entonces b=.......

c) Si a.b = 0 y a = -7 entonces b = ...

d) Si a: b= -1 y a=8 entonces b=......

5) Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones son V o F:

a) El producto de dos números enteros a y b es igual al producto entre el opuesto de a y el opuesto de b.

b) Si a un número entero se lo multiplica por (-1) se obtiene su opuesto

c) Siempre que se multiplica un número entero a por (-1) se obtiene otro número entero que es menor que a.

d) Siempre que se multiplica un número entero b por 2 se obtiene otro número entero que es mayor que b

NÚMEROS RACIONALES(Q)
Operaciones y sus propiedades

ADICIÓN y SUSTRACCIÓN: la adición y sustracción de nº racionales cumple las mismas propiedades que la adición y sustracción de nº enteros.

MULTIPLICACIÓN: se llama producto de dos nº racionales a otro nº racional cuyo numerador es el producto de los numeradores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores. Ej:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$$ (La regla de los signos es la misma que en Z)

Propiedades de la multiplicación: la multiplicación de números racionales cumple las mismas propiedades que la multiplicación de nº enteros.

DIVISIÓN: para dividir dos nº racionales se multiplica el primero por el inverso multiplicativo del segundo. Ej:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}$$

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

Propiedades de la potenciación

- Potencia de exponente cero. $a^0 = 1 \Leftrightarrow a \neq 0$
- Potencia de exponente negativo. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow a \neq 0$
- Potencia de otra potencia. $(a^n)^m = a^{n.m}$
- Producto de potencias de igual base. $a^n . a^m = a^{n+m}$
- Cociente de potencias de igual base. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \Leftrightarrow a \neq 0$
- Distributividad respecto de la multiplicación. $(a.b)^n = a^n . b^n$
- Distributividad respecto de la división. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \Leftrightarrow b \neq 0$

Propiedades de la radicación

La radicación se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$

$\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{x^7}} = x^{-\frac{7}{3}}$

Las propiedades de la radicación son análogas con las de la potenciación.

- Raíz de raíz. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n.m}} = \sqrt[m.n]{a}$
- Distributividad respecto de la multiplicación. $\sqrt[n]{a\,.\,b} = (a\,.\,b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\,.\,b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$
- Distributividad respecto de la división. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \Leftrightarrow b \neq 0$
- Simplificación de índices. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:r}{n:r}} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}} \Leftrightarrow r \neq 0 \wedge a > 0$

$\sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$ $\quad$ $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3}$ $\quad$ $\sqrt[10]{81} = \sqrt[10]{3^4} = \sqrt[5]{3^2}$

- Eliminación del radical. $\sqrt[n]{a^n} = a \Leftrightarrow n$ es impar $\vee$ $\sqrt[n]{a^n} = |a| \Leftrightarrow n$ es par

$\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = |7| = 7$ $\quad$ $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = |3| = 3$ $\quad$ $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ $\quad$ $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

Actividades

1) Aplicar, si es posible, propiedades de la potenciación y de la radicación, y luego resolver:

a) $(-8)^{11}.(-8)^4:(-8)^{12} =$

b) $(-1)^{343}.(-1)^{234} =$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{-100}} =$

d) $\sqrt[4]{256.16} =$

e) $48^3:8^3 =$

f) $(-21+20)^6 =$

g) $\left(\frac{15}{10}\right)^{-2} =$

h) $\sqrt{\sqrt{\frac{256}{81}}} =$

i) $\left(-\frac{2}{5}\right)^7.\left(-\frac{2}{5}\right)^9:\left(-\frac{2}{5}\right)^{12} =$

j) $\sqrt{\frac{15}{125}}:\sqrt{\frac{1}{3}} =$

k) $\left[\left(\frac{25}{130}\right)^6\right]^0 =$

l) $\sqrt{\frac{11}{25}+1} =$

m) $\left(-\frac{9}{12}\right):\left(-\frac{9}{12}\right)^3 =$

n) $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{343}\right)^2} =$

o) $(100)^{\frac{3}{2}} =$

Operaciones combinadas

1) Resolver las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[5]{32}:(-2)^0+(-5+2.3)^2.\sqrt[3]{8}-\sqrt{100}:\sqrt[3]{-125} =$

b) $\sqrt[3]{9.3}.(-1)^4+(-3)^2-\sqrt{64}:2^2+(-1-1)^2 =$

c) $\sqrt[4]{(-2).(-8)}.(-2)^4+(-2.4+7)^7.\sqrt{25}+(-5)^0 =$

d) $\sqrt[3]{3^2.3}-(-7+1)^2:(-2)^2+2^{20}:2^{19}-\sqrt[3]{-1} =$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}.(-8+2.5)^3+\sqrt[3]{\sqrt{25}+\sqrt{9}}.(-3) =$

f) $\left[\frac{2^2}{12}-\left(\frac{3}{5}.15+\frac{1}{4}\right)\right]:\frac{12}{21} =$

g) $16:\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\sqrt{\frac{36}{25}}.\left(-\frac{2}{5}\right) =$

h) $\sqrt{1-\frac{8}{9}.(-3)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3:\frac{3}{2}} =$

i) $\left(4-\frac{2}{5}\right):\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}-\left(-\frac{3}{4}\right)^2 =$

j) $\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^{-1}.\left(1-\frac{4}{5}\right)^{-1}:10} =$

k) $-\left(-\frac{7}{3}\right)^{-2}-\frac{6}{5}\left(-\frac{10}{21}\right)+(-7)^{-1}\sqrt{\frac{25}{49}} =$

l) $\sqrt{\frac{4}{9}}:(-3)^{-1}+(-1)^5\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)^{-1} =$

m) $\frac{1}{4}-(-2)^{-1}.\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\sqrt{\frac{25}{16}} =$

	N Naturales	Z Enteros	Q Racionales	R Reales	C Complejos
Tipo de conjunto	Discreto	Discreto	Discreto	Denso	Denso
Representación	Punto en la Recta Numérica (Incompleta) Ej: 2 , 5 , 1001, ...	Punto en la Recta Numérica (Incompleta) Ej: 0, -2 , 5 , -128 , 1001, ...	Punto en la Recta Numérica (Incompleta) Ej: 0, ½, - 5 , -3/4, ...	Punto en la Recta Numérica (Completa) Ej: 0, -7/2, 5, $\sqrt{3}$, -100, $2\sqrt{2}$ ...	Punto en el Plano (eje x parte R, eje y parte Im) (Completo) Se estipula $i^2 = -1$ Ej: 0, -3, 2i +4 , 120i, $\sqrt{2i}$,...
Suma **a + b**	**Siempre** 7 + 8 = 15	**Siempre** - 3 – 8 = - 11	**Siempre** $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$	**Siempre** $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$	**Siempre** 3i – 4 + 2i – 1 = 5i - 5
Resta **a - b**	**Solo si a ≥ b** 10 – 6 = 4 $3 - 7 \notin N$	**Siempre** 8 - 14 = - 6	**Siempre** $1 - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}$	**Siempre** $3\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$	**Siempre** 4i – 7i -2 = - 3i - 2
Multiplicación **a . b**	**Siempre** 12 . 4 = 48	**Siempre** -3 . 6 = - 18	**Siempre** $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{6}$	**Siempre** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{20}$	**Siempre** $3i \cdot 9i = 27i^2 = -27$
División **a : b**	**Solo si a es múltiplo de b** **Y solo si b ≠ 0** 8 : 4 = 2	**Solo si a es múltiplo de b** **Y solo si b ≠ 0** - 16 : 2 = - 8 $4 : 3 \notin Z$	**Siempre** **si b ≠ 0** $-\frac{5}{9} : \frac{10}{3} = -\frac{1}{6}$	**Siempre** **si b ≠ 0** $\sqrt{30} : \sqrt{5} = \sqrt{6}$	**Siempre** **si b ≠ 0** $6i^4 : 2i = 3i^3 = -3i$

	N Naturales	**Z** Enteros	**Q** Racionales	**R** Reales	**C** Complejos
Potenciación $a^n = b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a.a.a.\ldots = b$	**Siempre** $Con\ a,\ n \in N$ Excepto 0^0 $3^4 = 81$	**Siempre** $Con\ a \in Z$ $Con\ n \in N$ Excepto 0^0 $(-2)^3 = -8$ $(-3)^{-2} \notin Z$	**Siempre** $Con\ a \in Q$ $Con\ n \in Z$ Excepto 0^0 $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$ $\sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}} \notin Q$	**Siempre** $Con\ a \in R$ $Con\ n \in Q$ Excepto 0^0 $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = (-2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-2)^3} =$	**Siempre** $Con\ a \in C$ $Con\ n \in Q$ Excepto 0^0 $(3i)^3 = 27i^3 = -27i$ $(2-i)^2 =$ $4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$
Radicación $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b^n = a$	**Siempre** $Con\ a,\ n \in N$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ $-2 \notin N$	**Siempre** $Con\ a \in Z$ $Con\ n \in N$ $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ $\sqrt[3]{-8} = -2$ $\sqrt{-9} \notin Z$	**Siempre** $Con\ a \in Q$ $Con\ n \in Z$ $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$ $\sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{4} \notin Q$ $\sqrt{-\frac{4}{9}} \notin Q$	**Siempre** $Con\ a \in R$ $Con\ n \in Q$ $\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt{-8} \notin R$	**Siempre** $Con\ a \in R$ $Con\ n \in Q$ $\sqrt{-4} = \pm 2i$
Propiedades de la potenciación y la radicación	$a^0 = 1$	$a^n . a^p = a^{n+p}$	$a^n : a^p = a^{n-p}$	$\left(a^n\right)^p = a^{n.p}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r$

La potencia y la radicación son distributivas respecto de la multiplicación y división y no lo son respecto de la suma y de la

Problemas de aplicación de fracciones

1) Un compuesto químico está formado por 2/5 de agua, 1/5 de edulcorante y el resto por una composición de distintos elementos. ¿Qué cantidad de cada elemento hay en 10 gramos de dicho compuesto químico?

2) Ana ha comprado, con 1/8 del dinero que llevaba, un ordenador que costaba 16.000 pesos. ¿Cuánto dinero llevaba inicialmente?

3) En unos depósitos hay 84 millones de litros de petróleo de los que se obtienen los 2/7 en gasolina de 87 octanos, que se va a vender a 4/5 de $ el litro; 1/3 da lugar a gas-oil, que se va a vender a 5/7 de $ el litro; y 3/8 da lugar a gasolinas especiales que se va a vender a ¾ de $ el litro. El resto se pierde en las transformaciones por diversas causas. Se desea saber los litros que se lleva cada partida (también las pérdidas) y el dinero que se recoge.

4) Un señor reparte $ 216.000 entre sus hijos de la siguiente forma: los 2/9 a Juan, los 7/18 a Luis; el 25 % a Andrés; y el resto a José. Juan piensa gastar las 3/4 partes de lo que reciba en un coche, y ahorrar el resto. Luis, los 4/7 de su dinero en un balandro, los 2/7 para viajes, y el resto lo ahorra. Andrés destina los 5/6 en la compra de un piso y el resto en amueblarlo. José los 5/8 de su parte los piensa dedicar en la mejora de una pequeña finca que posee, y el resto a la compra de un tractor. Se desea saber la cantidad que le corresponde a cada uno y el dinero destinado a cada partida.

EXPRESIONES DECIMALES

Las expresiones decimales son expresiones numéricas no enteras que poseen dentro de su composición una porción decimal y otra entera, las cuales se encuentran separadas entre ellas por una coma.

Clasificación de las expresiones decimales

♣**Expresiones decimales finitas**: tienen un número finito de cifras decimales.

Ej.: 2,45 31,002

♣**Expresiones periódicas puras:** tienen infinitas cifras decimales periódicas.

Ej.: $78,\hat{4}$ $0,\widehat{905}$

♣**Expresiones periódicas mixtas:** tienen una parte decimal no periódica seguida de otra periódica

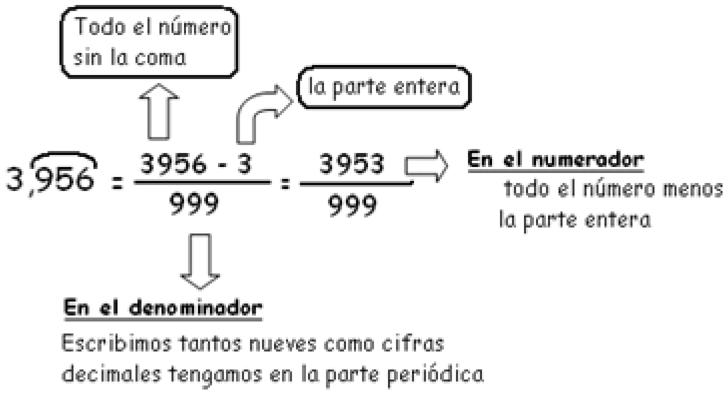
Ej.: $5,8\widehat{94}$ $10,72\hat{5}$

♣**Expresiones decimales infinitas no periódicas:** tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Constituyen los llamados ***números irracionales*.**

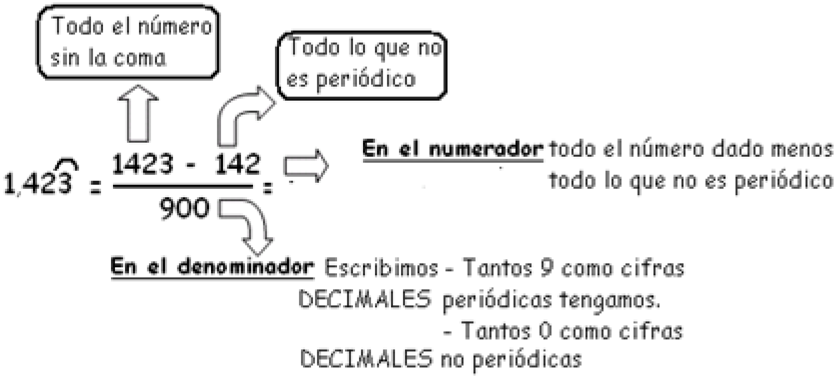
Ej.: π, $\sqrt{2}$

<u>**PASAR DE UNA EXPRESIÓN DECIMAL PERIÓDICA A FRACCIÓN**</u>

♣<u>**Expresiones periódicas puras**</u>



♣<u>**Expresiones periódicas mixtas**</u>



Actividades

1) Escribe la fracción correspondiente a cada una de las expresiones decimales:

a) $0,016 =$ d) $3,5 =$ g) $10,01 =$

b) $0,\overset{\frown}{3} =$ e) $0,\overset{\frown}{6} =$ h) $8,\overline{42} =$

c) $0,2\overline{36} =$ f) $0,25\overset{\frown}{3} =$ i) $1,7\overset{\frown}{3} =$

2) Escribe mediante truncamiento una aproximación de cada uno de los siguientes decimales por las centésimas, por las décimas y por las unidades:

Decimal	2,3458	85,5758	855,93	0,1005
Aproximación a las centésimas				
Aproximación a las décimas				
Aproximación a las unidades				

3) Escribe mediante redondeo una aproximación de cada uno de los siguientes decimales a las centésimas, a las décimas y a las unidades:

Decimal	2,3458	85,5758	855,93	0,1005
Aproximación a las centésimas				
Aproximación a las décimas				
Aproximación a las unidades				

Geometría

La geometría como palabra tiene dos raíces griegas: geo = tierra y metrón = medida; o sea, significa "medida de la tierra". Su origen, unos tres mil años antes de Cristo, se remonta al Medio Oriente, en particular al Antiguo Egipto, en que se necesitaba medir predios agrarios para cobrar impuestos o la demarcación de tierras luego de las inundaciones del río Nilo, en la construcción de pirámides y monumentos. Esta concepción geométrica se aceptaba sin demostración, era producto de la práctica (equivalentes a recetas).

Estos conocimientos pasaron a los griegos y fue Thales de Mileto quien hace unos 6 siglos antes de Cristo inició la geometría demostrativa. Las propiedades se demuestran por medio de razonamientos y no porque resulten en la práctica. Aunque no con tanta rigurosidad como luego sí lo fue a partir de la escuela pitagórica. Las demostraciones pasan a ser fundamentales y son la base de la Lógica como leyes del razonamiento.

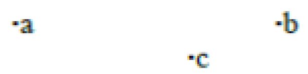
Los griegos, y entre ellos Euclides la construyeron observando directamente los cuerpos de la naturaleza. De ellos extrajeron los conceptos de punto, recta y plano, que forman la base de esta ciencia.

Cualquier figura geométrica es un conjunto de puntos, rectas y planos, de modo que se les pueden aplicar todas las ideas que sobre conjuntos conocemos.

Estos tres conceptos sobre los cuales construimos la geometría, como todo concepto primario, no admiten una definición; por lo tanto, tenemos que recurrir a la intuición.

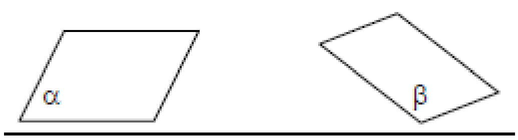
Estos conceptos intuitivos e indefinibles reciben el nombre de primeros principios, axiomas o postulados.

PUNTO: No se puede definir. La huella que deja un lápiz bien afilado sobre una hoja de papel nos sugiere la idea de un punto. Un punto carece de dimensiones, es sólo una posición en el espacio. Se representa utilizando letras minúsculas, por ejemplo:



RECTA: Una idea vaga de recta se tiene por la observación del borde de una regla, un hilo en tensión, etc. La recta se extiende sin límite en dos sentidos opuestos. Se denotan las rectas utilizando letras mayúsculas de imprenta:

PLANO: Una idea de plano nos la sugiere la superficie de un tablero, el piso, etc. Un plano tiene dos dimensiones, largo y ancho. Un plano tiene una extensión ilimitada. Un plano se considera constituido por un conjunto infinito de puntos. Se denota el plano utilizando letras griegas:

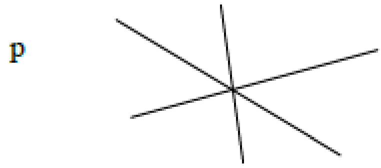


AXIOMAS CARACTERÍSTICOS

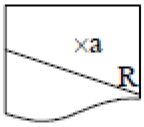
- Postulado1: "Existen infinitos puntos".

- Postulado2: "Dos puntos determinan una recta".

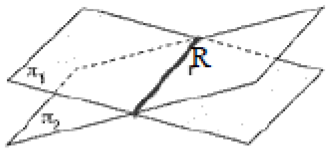
- Postulado3: "Por un punto pasan infinitas rectas".



- Postulado 4: "Una recta y un punto fuera de ella determinan un plano".

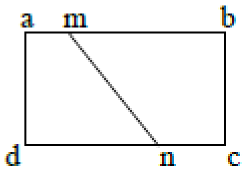


- Postulado 5: "Por una recta pasan infinitos planos".



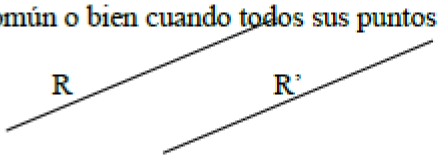
Planos secantes

Dos planos se cortan en una línea recta, recta de intersección.
Postulado 6: " La recta determinada por dos puntos de un plano pertenece a dicho plano".

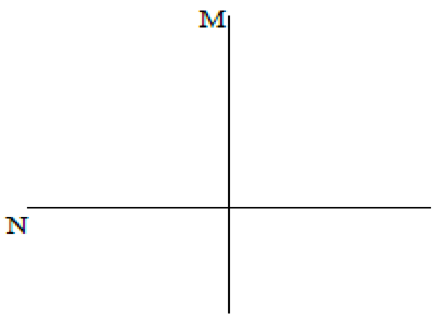


SEMIPLANO: toda recta mn de un plano lo divide en dos regiones llamadas semiplanos. Cada punto del plano pertenece a uno de los semiplanos, excepto los puntos de la recta mn que pertenecen a los dos.
Un conjunto de puntos se dicen coplanares si se encuentran todos en un mismo plano.

<u>Definición de rectas paralelas.</u>
Así, dos <u>rectas</u>, contenidas en un <u>plano</u>, son paralelas cuando no se cortan, es decir que no tienen ningún punto en común o bien cuando todos sus puntos coinciden.



<u>Definición de rectas perpendiculares</u>
Dos rectas perpendiculares son aquellas que al cortarse, forman cuatro ángulos rectos.



$M \perp N$

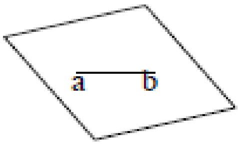
SEMIRRECTA: si señalamos un punto "a" en una recta, dicho punto junto con los puntos que le siguen o le preceden en el mismo sentido se denomina semirrecta; A se conoce como el origen de la semirrecta. Para denotar una semirrecta se señala otro punto además del origen, y se utiliza el siguiente símbolo:

$\overrightarrow{ab}$

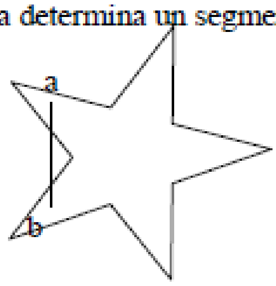
SEGMENTO: si señalamos sobre una recta los puntos a y b, se denomina segmento ab a la intersección de la semirrecta de origen a que contiene al punto b y la semirrecta de origen b que contiene al punto a

$\overline{ab}$

Una figura es convexa si cada vez que tomamos dos puntos en ella, el segmento que los une pertenece también a dicha figura.



Una figura es cóncava si al menos un par de puntos de la figura determina un segmento no incluido en ella



Una figura es *convexa* si cada vez que tomamos dos puntos en ella, el segmento que los une pertenece también a dicha figura.

Actividad

Marcar con una X la respuesta correcta

¿Cuántas rectas se pueden trazar por un punto?

Una: ○ Finitas: ○ Infinitas: ○

¿Cuántos planos se pueden trazar por un punto?

Ninguno: ○ Finitas: ○ Infinitas: ○

¿Se puede trazar más de una recta por dos puntos distintos?

Si: ○ No: ○

¿Cuántos planos se pueden trazar por dos puntos distintos?

Una: ○ Finitas: ○ Infinitos: ○

¿Se puede tener más de una recta que interseque a un plano en un punto?

Si: ○ No: ○

¿Cuántos planos pueden intersecar a una recta en un punto?

Ninguno: ○ Finitas: ○ Infinitas: ○

¿Es posible que dos planos se intersequen en un punto solamente?

Si: ○ No: ○

¿Cuántos puntos contiene una recta?

Uno: ○ Finitos: ○ Infinitos: ○

¿Cuántas rectas contiene un plano?

Una: ○ Finitas: ○ Infinitas: ○

¿Pueden dos planos contener a la misma recta?

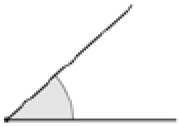
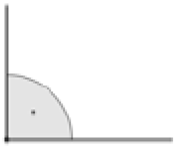
Si: ○ No: ○

¿Pueden tres planos coincidir en un punto solamente?

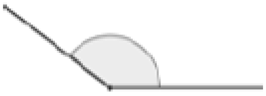
Si: ○ No: ○

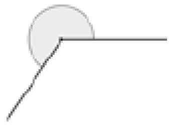
Clasificación de ángulos según su medida

Nulo = 0° Agudo < 90° Recto = 90°

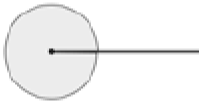
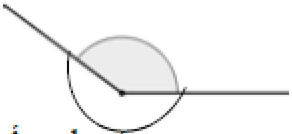



Obtuso>90° Llano = 180° Cóncavo > 180°





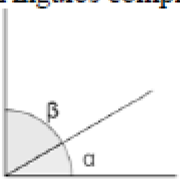
Completo = 360° Ángulo convexo

Ángulo cóncavo

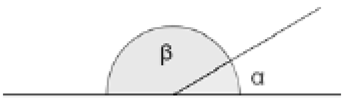
CLASES DE ÁNGULOS SEGÚN SU SUMA

Ángulos complementarios



Dos ángulos son complementarios si suman 90°.

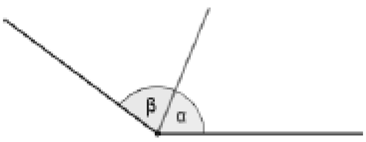
Ángulos suplementarios



Dos ángulos son suplementarios si suman 180°.

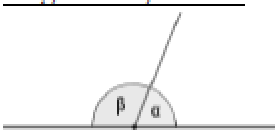
CLASES DE ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN

Ángulos consecutivos



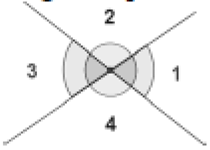
Ángulos consecutivos son aquellos que tienen el vértice y un lado común.

Ángulos adyacentes



Ángulos adyacentes son aquellos que tienen el vértice y un lado común, y los otros lados situados uno en polongación del otro. Forman un ángulo llano.

Ángulos opuestos por el vértice



Son los que teniendo el vértice común, los lados de uno son prolongación de los lados del otro.
Los ángulos 1 y 3 son iguales.
Los ángulos 2 y 4 son iguales.

Bisectriz de un ángulo: La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que divide el ángulo en dos partes iguales, cuyo origen es el vértice del ángulo.

Actividades

1.- Pasar a segundos el ángulo 45º 52´34´´

2.- Pasar a minutos el ángulo 31º 40´

3.- Pasar a grados el ángulo 10º 34´41´´

4.- Sumar los ángulos:

a) 35º 49´35´´ + 12º 41´50´´

b) 25º 47´ 58´´ + 15º 29´ 47´´

c) 15º 00´ 41´´ + 34º 52´ 49´´ + 17º 35´´

d) 21º + 37´51´´ + 18º 39´´

5.- Restar los ángulos:

a) 47º 25´ 36´´ - 20º 18´ 54´´

b) 35º 37´ 40´´ - 12º 47´ 53´´

c) 37º - 13º 45´ 38´´

6.- Hallar el ángulo complementario del ángulo 37º 42´ 27´´

7.- Hallar el ángulo suplementario del ángulo 75º 34´42´´

8.- Marcar con una X la respuesta correcta

a) ¿Cuántas bisectrices puede tener un ángulo?

Una: ◯ Finitas: ◯ Infinitas: ◯

b) Un ángulo agudo puede medir

Menos de 90°: ◯ Más de 90°: ◯ Más de 180°: ◯

c) Un ángulo cuya medida es 90° se llama ...

Llano: ◯ Recto: ◯

d) El complemento de 30° es

60°: ◯ 150°: ◯

e) El suplemento de 40° es

140°: 60°:

f) Un ángulo llano mide:

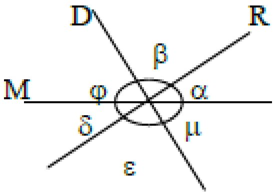
360°: 180°:

g) Los ángulos opuestos por el vértice sus medidas son:

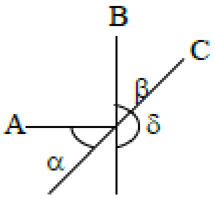
Complementarios: Suplementarios: Igual:

9) Halla el valor de los ángulos desconocidos:

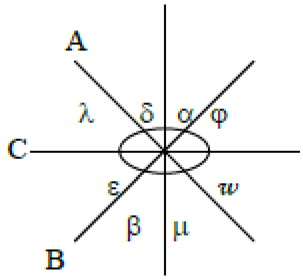
a) Datos: $\alpha = 38^\circ$
$\beta = 67^\circ$
Hallar φ, δ, ε y μ



b) Datos: $A \perp B$
$\alpha = 27^\circ$
Hallar β y δ

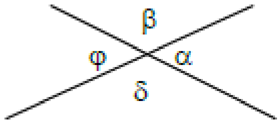


c) Datos: $A \perp B$, $C \perp D$
$\alpha = 33^\circ 30'$
Hallar $\varphi, \lambda, \delta, \varepsilon, w, \beta$ y μ

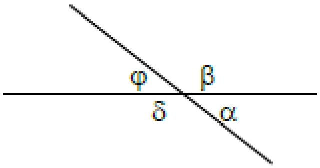


10) En cada caso determinar el valor de x, φ, α , δ, y β

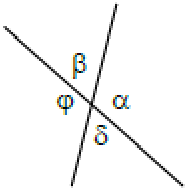
a) Datos: $\alpha = x + 15^\circ$
$\beta = 2x$



b) Datos: $\varphi = 3x + 28^\circ$
$\delta = 5x + 88^\circ$

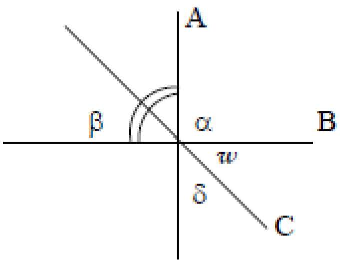


c) Datos: $\delta = 4x - 25^\circ$
$\alpha = 3x + 30^\circ$



11)

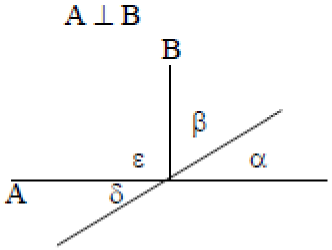
En la figura $A \perp B$. Indicar en cada caso V (verdadero) o F (falso):



	a)	$\alpha = 90^\circ$
	b)	$\alpha = \beta$
	c)	δ y w son consecutivos
	d)	α y β son suplementarios
	e)	$C \perp A$
	f)	β y δ son opuestos por el vértice
	g)	w y α son complementarios
	h)	δ y w son complementarios

12)

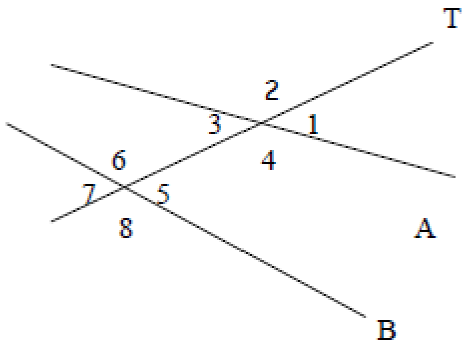
ꞌ. De acuerdo al gráfico, completar cada fila del cuadro:



α	β	δ	ε
28º15'			
	36º10'		
		38º15'12"	
			90º

<u>Ángulos formados por dos rectas y una secante</u>

Si cortamos dos rectas A y B con una secante T, se forman de manera natural ocho ángulos, cuatro en cada punto de intersección.



Se llama ángulos correspondientes a los ángulos que tienen la misma ubicación respecto de las rectas A y B. De esta manera, son correspondientes los pares de ángulos: $\hat{1}$ y $\hat{5}$, $\hat{2}$ y $\hat{6}$, $\hat{3}$ y $\hat{7}$, $\hat{4}$ y $\hat{8}$

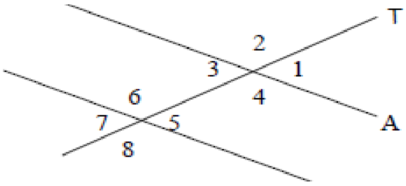
Se llama ángulos alternos externos a los ángulos que están ubicados por fuera de las rectas y a distinto lado de la secante. De esta manera, son alternos externos los pares de ángulos: $\hat{2} - \hat{8}$ y $\hat{1} - \hat{7}$

Se llama ángulos alternos internos a los ángulos que están ubicados por dentro de las rectas y a distinto lado de la secante. De esta manera, son ángulos alternos internos los pares de ángulos $\hat{3} - \hat{5}$ y $\hat{4} - \hat{6}$.

Se llama ángulos conjugados internos a los ángulos que están ubicados por dentro de las rectas y del mismo lado de la secante. De esta manera, son ángulos conjugados internos los pares de ángulos $\hat{4} - \hat{5}$ y $\hat{3} - \hat{6}$

Se llama ángulos conjugados externos a los ángulos que están ubicados por fuera de las rectas y del mismo lado de la secante. De esta manera, son ángulos conjugados externos los pares de ángulos $\hat{2} - \hat{7}$ y $\hat{1} - \hat{8}$

<u>En el caso de rectas paralelas</u>: A//B cortadas por la transversal T, se verifica que:



* Los ángulos correspondientes entre paralelas son de igual medida; por lo tanto en la figura:

$\hat{1}$ y $\hat{5}$ son iguales por ser correspondientes entre paralelas

$\hat{2}$ y $\hat{6}$ son iguales por ser correspondientes entre paralelas

$\hat{3}$ y $\hat{7}$ son iguales por ser correspondientes entre paralelas

$\hat{4}$ y $\hat{8}$ son iguales por ser correspondientes entre paralelas

* Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales por lo tanto en la figura:

$\hat{3}$ y $\hat{5}$ son iguales por ser alternos internos entre paralelas

$\hat{4}$ y $\hat{6}$ son iguales por ser alternos internos entre paralelas

* Los ángulos alternos externos entre paralelas son iguales, por lo tanto en la figura:

$\hat{2}$ y $\hat{8}$ son iguales por ser alternos externos entre paralelas

$\hat{1}$ y $\hat{7}$ son iguales por ser alternos externos entre paralelas

* Los ángulos conjugados internos entre paralelas son suplementarios, por lo tanto en la figura:

$\hat{4}$ y $\hat{5}$ son suplementarios por ser conjugados internos entre paralelas

$\hat{3}$ y $\hat{6}$ son suplementarios por ser conjugados internos entre paralelas

* Los ángulos conjugados externos entre paralelas son suplementarios, por lo tanto en la figura:

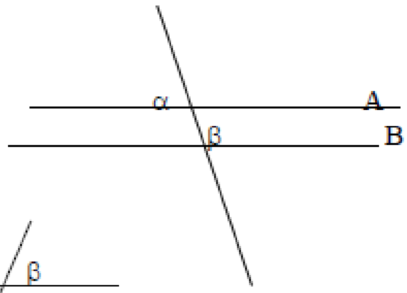
$\hat{2}$ y $\hat{7}$ son suplementarios por ser conjugados externos entre paralelas

$\hat{1}$ y $\hat{8}$ son suplementarios por ser conjugados externos entre paralelas

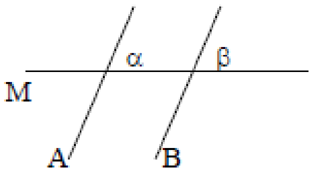
Actividad:

Calcular en cada caso el valor de x , $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, sabiendo que A // B:

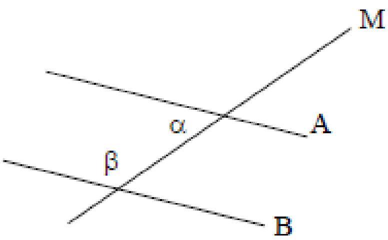
a) $\alpha = x + 20°$
$\beta = x - 20°$



b) $\alpha = x + 60°$
$\beta = 80° - x$



c) $\alpha = 5x - 24°$
$\beta = 4x + 42°$



POLÍGONOS

Un polígono es la región del plano limitada por tres o más segmentos.

Elementos de un polígono

LADO: Cada uno de los segmentos que componen el polígono.

VÉRTICE:Es el punto en el que se unen dos lados consecutivos.

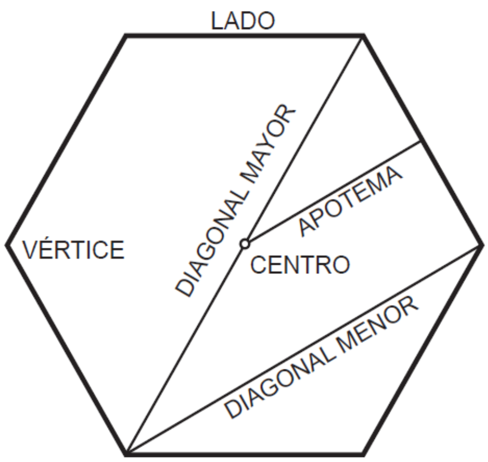
DIAGONAL: Segmento que une dos vértices no consecutivos. Algunos polígonos tienen diagonal mayor y diagonal menor.

PERÍMETRO: Es la suma de todos los lados.

En un polígono regular además encontramos:

CENTRO: Es el punto equidistante de todos los vértices y lados. En el se encuentra el centro de las circunferencias inscrita y circunscrita.

APOTEMA: Es el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de los lados perpendicularmente.



Denominación de los polígonos según el número de lados:

Número de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono

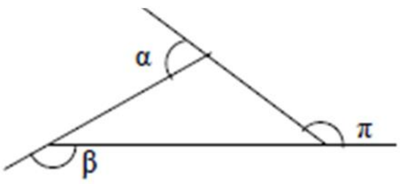
Número de lados	Nombre
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono

<u>TRIANGULOS</u>

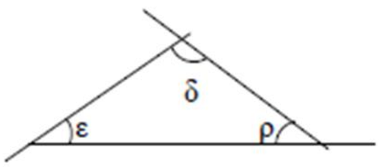
Un triángulo es un polígono de tres lados.

Los tres segmentos que limitan el triángulo se denominan *lados*, y los extremos de los lados, *vértices*.

En un triángulo se consideran dos tipos de ángulos: <u>*interior*</u> (formado por dos lados) y <u>*exterior*</u> (formado por un lado y la prolongación de otro).



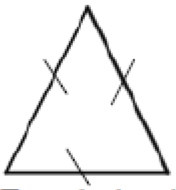
$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\pi}$ son ángulos exteriores del triángulo



$\hat{\varepsilon}$, $\hat{\rho}$ y $\hat{\delta}$ son ángulos interiores del triángulo

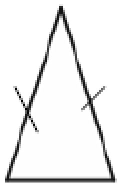
Clasificación de triángulos según sus lados

Triángulo equilátero



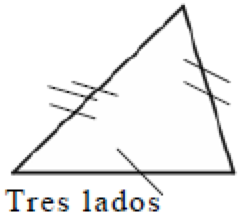
Tres lados iguales.

Triángulo isósceles



Dos lados iguales.

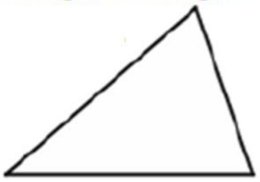
Triángulo escaleno



Tres lados desiguales

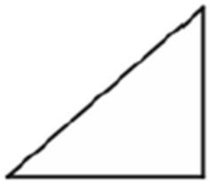
Clasificación de triángulos según sus ángulos

Triángulo acutángulo



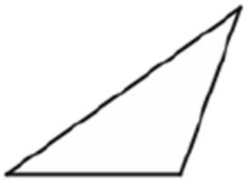
Tres ángulos agudos

Triángulo rectángulo



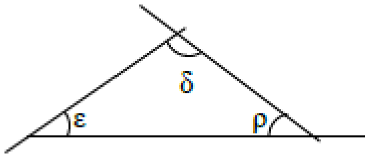
Un ángulo recto
El lado mayor es la hipotenusa.
Los lados menores son los catetos.

Triángulo obtusángulo

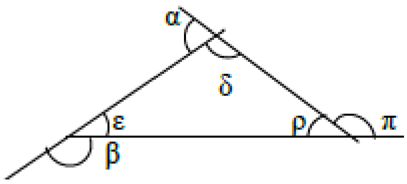


Un ángulo obtuso.

- En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180º $\Rightarrow$ $\hat{\varepsilon}, \hat{\rho}$ y $\hat{\delta} = 180^\circ$



- En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.



por ejemplo: $\pi = \varepsilon + \delta$

Actividades

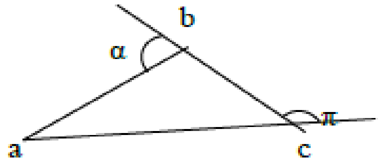
1. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ y $\hat{\pi}$ son ángulos interiores de un triángulo. Completar el siguiente cuadro calculando los ángulos que faltan:

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\pi}$
37º 15'	47º 50'	
	78º 12'	54º 8'
102º 13'	34º 5'	
95º 32'		24º 23'

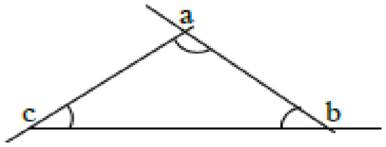
2. En el triángulo $\widehat{abc}$, $\hat{a} = 3x$, $\hat{b} = 5x$ y $\hat{c} = 4x$. Calcular $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$

3. Datos: $\alpha = 109° 12'$
   $\pi = 125° 30'$

Calcular $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$



4. Datos: $\hat{a} = 3x$, $\hat{b} = 2x$ y $\hat{c} = x$. Calcular $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$



1. No siempre es posible construir un triángulo con tres segmentos de longitud conocida. Comprobalo con los siguientes ejemplos:
   a) 3, 4 y 5 cm.
   b) 6, 6 y 9 cm.
   c) 3, 4 y 9 cm.
   d) 3, 5 y 8 cm.
   e) ¿que condición deben cumplir los lados de un triángulo para que se pueda construir?

2. Regla y transportador en mano y… ¡a trabajar!:

   a) Construye un triángulo conocidos dos lados y el ángulo que forman estos dos lados, por ejemplo: los lados miden 3 y 4 cm. y el ángulo comprendido 30º.
   b) Construye un triángulo conocido un lado y dos ángulos adyacentes, por ejemplo: el lado mide 5 cm. y los ángulos adyacentes 60º y 45º.
   c) Construye un triángulo conocidos dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos, por ejemplo: Los lados miden 5 y 8 cm. y el ángulo no comprendido entre ellos 50º.

3. Si solamente conocemos dos lados:
   a) por ejemplo, que valgan 6 y 10 cm. ¿Podés construirlo? ¿Podés construir un solo triángulo o por el contrario podés construir más de uno?
   b) Intentá hacerlo ahora si sabemos los tres ángulos, por ejemplo: 30º, 25º y 125º.

4. ¿Cuánto suman los tres ángulos de un triángulo? Probá a hacer lo siguiente: dibujá en tu cuaderno un triángulo cualquiera y recortálo. Doblá una esquina de tal forma que el vértice coincida con el lado opuesto. A continuación doblá las otras dos esquinas de forma que los vértices coincidan con la primera. Así habrás conseguido que los tres ángulos estén adyacentes y puedas ver fácilmente cuanto suman.

MAGNITUDES

Magnitud es todo aquello que se puede medir, sumar o comparar. Por lo tanto el volumen, el peso, la longitud (distancia o espacio), la capacidad, etc., son magnitudes. En cambio no son magnitudes la verdad, la alegría, la mentira, la envidia, el amor, el olor, el sabor, etc. ya que no se pueden medir ni comparar.

Medir es comparar una magnitud física con una cantidad fija de la misma magnitud, tomada como unidad. Las magnitudes físicas se miden con instrumentos calibrados. Por ejemplo la masa de un cuerpo se puede medir en una balanza de platillos comparándola con la de otros cuerpos de masa conocida. Podemos medir el largo de una regla, la capacidad de un recipiente, el peso de un objeto, la superficie de un campo, el volumen de una habitación, etc.

UNIDADES DE LONGITUD

(Espacio, distancia, altura, profundidad, etc.)

Cada unidad equivale a 10 unidades del orden inmediato inferior, y para reducir se tiene en cuenta que cada unidad corresponde a una cifra.

MÚLTIPLOS			UNIDAD	SUBMULTIPLOS		
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m
10^3 m	10^2 m	10^1 m	10^0 m	10^{-1} m	10^{-2} m	10^{-3} m

UNIDADES DE ÁREA

Cada unidad equivale a 100 unidades del orden inmediato inferior.

MÚLTIPLOS			UNIDAD	SUBMULTIPLOS		
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1000000 m^2	10000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,0001 m^2	0,000001 m^2
10^6 m^2	10^4 m^2	10^2 m^2	10^0 m^2	10^{-2} m^2	10^{-4} m^2	10^{-6} m^2

Para reducir debe tenerse en cuenta que a cada unidad le corresponden dos cifras.

UNIDADES DE VOLUMEN

Cada unidad equivale a 1.000 unidades del orden inmediato inferior, y para reducir a cada unidad le corresponden tres cifras.

MÚLTIPLOS			UNIDAD	SUBMULTIPLOS		
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1000000000 m^3	1000000 m^3	1000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000001 m^3	0,000000001 m^3
10^9 m^3	10^6 m^3	10^3 m^3	10^0 m^3	10^{-3} m^3	10^{-6} m^3	10^{-9} m^3

UNIDADES DE MASA

MÚLTIPLOS			UNIDAD	SUBMÚLTIPLOS		
kg	hg	dag	gramo	dg	cg	mg
1000g	100g	10g	1g	0,1g	0,01g	0,001g

LA CAPACIDAD

El volumen de los líquidos (leche, aceite, agua, vino, etc.) y de ciertas materias secas (cereales, legumbres, etc.) se mide utilizando recipientes de medidas fijas que los contengan. El volumen interior de esos recipientes se denomina capacidad y su unidad es el litro, definido como la capacidad de 1 dm^3.

Las unidades que se pueden formar a partir del litro son:

Nombre	Símbolo	Equivalencia
Kilolitro	kl	10^3 l = m^3
Hectolitro	hl	10^2 l
Decalitro	dal	10 l
Litro	l	1 l = 1 dm^3
Decilitro	dl	10^{-1} l
Centilitro	cl	10^{-2} l
Mililitro	ml	10^{-3} l = 1 cm^3

Actividades

1. Relaciona cada magnitud con la unidad que utilizarías para medirla:

Longitud de un lápiz — Metro

Altura de un árbol — Decímetro

Distancia entre Paraná y Córdoba — Kilómetros

Longitud de uno de los lados persiana — Centímetro

2. Completa esta tabla de cambio de unidades:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
0,012	0,12	1,2	12	120	1.200	12.000
			280			
					5.900	
0,54						

3. Transforma estas longitudes en metros y ordénalas de menor a mayor:

a) 2,8 km = ... b) 2.755 m =................ c) 27,9 hm =.............

d) 275 dam = ... e) 368 cm = ... f) 3.455 mm =.............

4. Completa las siguientes igualdades:

3 dam= m	7 = 700 m	3,5 dam = 350	dm= 3,6 m
m = 72 cm	3.700 m = km	4.100 = 41 dm	cm= 500 mm

Actividades con unidades de capacidad

1. Realiza los siguientes cambios de unidades

   a) ¿Cuantos litros son 50 cl? l

   b) ¿Cuántos litros son 3,6 dal? l

   c) ¿Cuántos decalitros son 0,50 kl? ....dal

   d) ¿Cuántos decalitros son 20,5O cl? ....dal

2. Una gota de agua al convertirse en vapor de agua multiplica su volumen por 1700. Calcula:

   a) El volumen que ocuparán 5 cm^3 de agua transformados en vapor. Expresa el resultado en litros. ....

   b) El volumen, en mm^3, que ocuparán 4,25 litros de vapor de agua al condensarse.................

3. El galón es una unidad de capacidad utilizada en los países anglosajones. Su equivalencia es de 3,7852 litros. ¿Cuántos cm^3 serán 2 galones y medio? .... cm^3

<u>Relación entre unidades de capacidad, volumen y masa</u>

Existe una relación muy directa entre el volumen y capacidad. **1 l es la capacidad** que contiene un recipiente cúbico de 1 dm de arista; es decir, la capacidad **contenida en un volumen de 1 dm^3**.

También existe una relación entre el volumen y la masa de agua. **1 g equivale a 1 cm^3 de agua pura a 4 °C**.

Capacidad	Volumen	Masa (de agua)
1 kl	1 m^3	1 t
1 l	1 dm^3	1 kg
1 ml	1 cm^3	1 g

<u>Actividades</u>

1.

Un embalse contiene 95 hm^3 de agua. Calcula.

a) Su capacidad en m^3.
b) Su capacidad en litros.
c) Si fuera agua destilada, ¿cuál sería su masa en toneladas y en kilogramos?

2.

Considera que el aula de tu clase tiene las siguientes dimensiones: largo 0,9 dam, ancho 6 m y altura 300 cm. Calcula.

a) El volumen de la clase expresado en m^3.

b) La capacidad en litros si se llenara totalmente de agua.

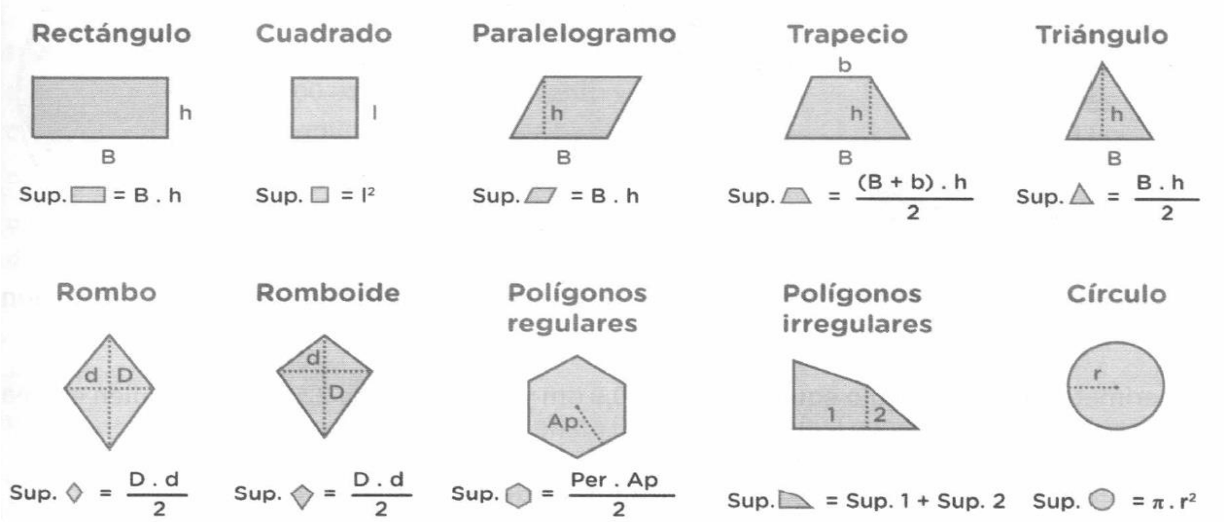
c) El peso en kg y t del agua.

PERÍMETRO

El perímetro de un polígono es la suma de sus lados. La longitud de una circunferencia es $2\pi r$.

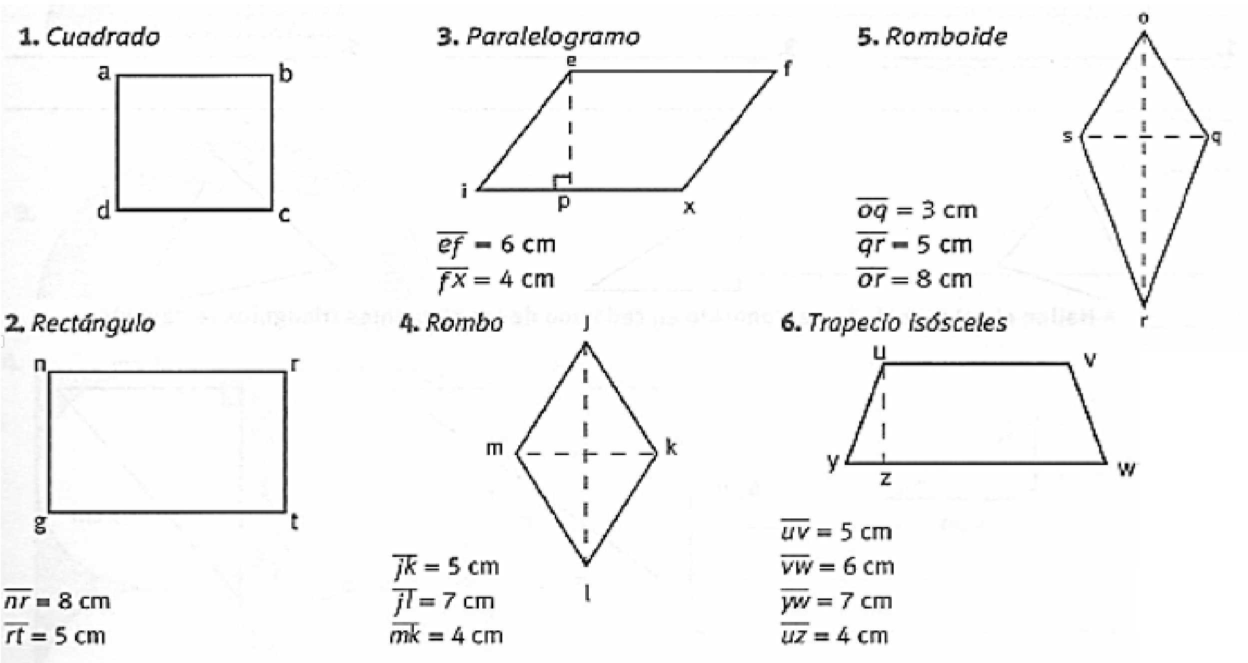
SUPERFICIE

Recuerden que para calcular la superficie de las diferentes figuras geométricas, hay fórmulas que nos permiten hacerlo. Es fundamental que todas las medidas estén expresadas en la misma unidad. Por ejemplo, no se puede tener la base en centímetros y la altura en metros. Antes de aplicar la fórmula, debemos elegir en qué unidad trabajar y hacer los pasajes necesarios.

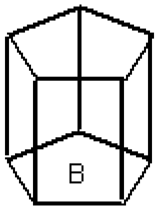
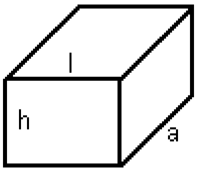
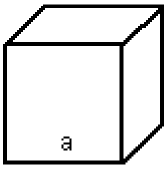
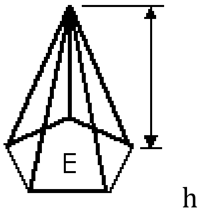
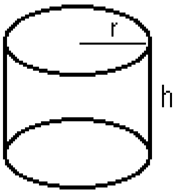
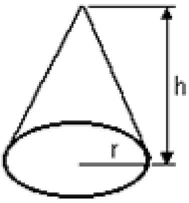
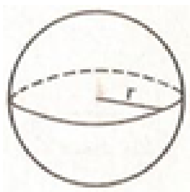


Actividad

Calcula el perímetro y la superficie de cada uno de los siguientes cuadriláteros:



<u>VOLÚMEN</u>

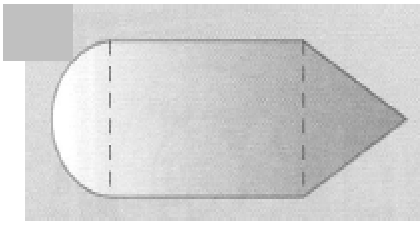
VOLÚMENES				
NOMBRE	**DEFINICIÓN**	**FIGURA**	**TÉRMINOS**	**FÓRMULA**
Prisma	Cuerpo geométrico cuyas bases son dos polígonos iguales y paralelos y sus caras laterales son paralelogramos		B=área de la base h=altura	$V=h.B$
Ortoedro	Prisma cuyas bases son dos rectángulos.		l=largo a=ancho h=altura	$V=h.l.a$
Cubo	Ortoedro donde las tres dimensiones son iguales.		a=lado	$V=a^3$
Pirámide	Cuerpo geométrico cuya base es un polígono cualquiera y sus caras laterales triángulos		B=área de la base h=altura	$V=\frac{1}{3}h.B$
Cilindro	Es el Cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados		r=radio h=altura	$V=h.p.r^2$
Cono	Es el Cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno		r=radio h=altura	$V=\frac{1}{3}h\pi r^2$
Esfera	Cuerpo geométrico engendrado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.		r=radio	$V=\frac{4}{3}\pi.r^3$

Actividad

1.

Calcular el perímetro de la siguiente figura.

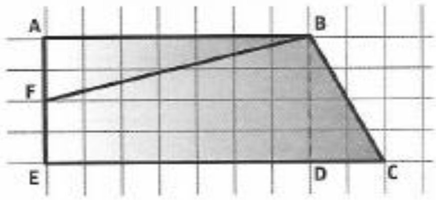
Datos:
Perímetro del triángulo equilátero: 18 cm
Perímetro del rectángulo: 2,8 dm



2.

ABCE es un trapecio rectángulo. Calcular el área del cuadrilátero FBCE, con los datos indicados.

F es punto medio de AE
$\overline{AF} = \overline{CD}$
$\overline{AB} = 10$ cm
$\overline{BD} = 8$ cm

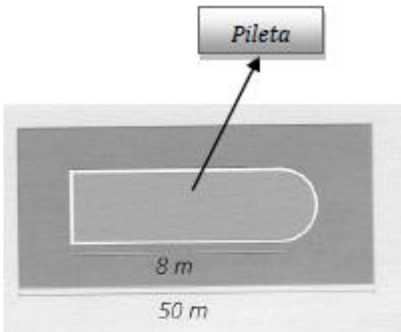


3. En un Club construyeron una piscina sobre un terreno rectangular de 500m2. El radio de la semicircunferencia es igual al 25% de la medida del lado menor del terreno.

a) Calcular el área que ocupa la piscina.

b) Se quiere colocar reja alrededor de la piscina. ¿Cuántos metros de reja se necesitan?

c) Se quiere colocar césped en la zona libre del terreno y el m2 cuesta $ 200, ¿Cuánto habrá que pagar por la compra?



4. Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de $50 el metro cuadrado.

a) ¿Cuánto costará pintarla?

b) ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?

5. En un depósito de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuantas cajas podremos almacenar?

6. La cúpula de una catedral tiene forma semiesférica, de radio 50 m. Si restaurarla tiene un coste de $150 el metro cuadrado, ¿A cuánto ascenderá el presupuesto de la restauración?

7. Un recipiente cilíndrico de 10 cm de radio y 5 cm de altura se llena de agua. Si la masa del recipiente lleno es de 2 kg, ¿cuál es la masa del recipiente vacío?

8. Un cubo de 20 cm de arista está lleno de agua. ¿Cabría esta agua en una esfera de 20 cm de radio?

RAZONES Y PROPORCIONES

Generalmente cuando conversamos estamos haciendo comparaciones, por Ej. “Tengo más edad que tú”, “tienes menos lápices que yo”, etc. Estas comparaciones se llaman por “DIFERENCIA”. Pero también existen otras comparaciones que no la conocemos con ese nombre y que también son muy usadas. Ej. “tome 2 cápsulas cada 8 horas “, “3 cucharaditas de royal por cada taza de harina”, etc. Estas comparaciones se llaman por cociente y se expresan en forma de razón.

RAZON : Dados dos números en un cierto orden se llama razón al cociente indicado entre ello

Ej. 2 tazas de agua por cada taza de arroz. $\frac{2}{1}$ 12 kilómetros por litro. $\frac{12}{1}$

80 kilómetros por hora. $\frac{80}{1}$ 85 días de cada 100 $\frac{85}{100}$

FORMA DE EXPRESAR UNA RAZON : $\frac{a}{b}$ o a : b

FORMA DE LEER UNA RAZON : a “ es a “ b

TERMINOS DE UNA RAZON :

$\frac{a}{b}$ a se llama antecedente

b se llama consecuente

PROPORCION :

Cuatro números a,b,c,d (con b y d distintos de cero forman una proporción si la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos segundos.

Ejemplo: 8;4:6;3

FORMA DE EXPRESAR UNA PROPORCION :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o a :b = c : d se lee “ a es a b como c es a d “

Ej. $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$

TERMINOS DE UNA PROPORCION: a y d : extremos b y c : medios

PROPORCIÓN CONTINUA:

Una proporción es continua cuando tiene los medio iguales

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ b es el medio proporcional

PROPIEDAD DE LAS PROPORCIONES :

en toda proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad b \text{ y } d \neq 0$

CALCULO DEL TERMINO DESCONOCIDO DE UNA PROPORCION :

aplicando la propiedad de las proporciones : producto de medios es igual al producto de extremos, se puede encontrar un término que falta en una proporción. Ej.

$\frac{3}{4} = \frac{x}{8}$ $\quad 3 \cdot 8 = 4 \cdot x \quad$ $x = \frac{3 \cdot 8}{4}$

$24 = 4x$

$24 : 4 = x$

$6 = x$

$\frac{3}{x} = \frac{x}{27}$ $\quad x^2 = 3.27$

$x = \sqrt{81}$ $\quad x = \pm\sqrt{3.27}$

$x = \pm 9$

Actividad

Completa el valor que falta en las siguientes proporciones:

a) $\frac{1}{20} = \frac{2}{x}$;

b) $\frac{1}{20} = \frac{y}{520}$

c) $\frac{1}{6} = \frac{2}{x}$;

d) $\frac{1}{6} = \frac{y}{72}$

e) $\frac{50}{1300} = \frac{x}{5200}$

f) $\frac{5}{100} = \frac{6}{x}$

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando:

-Al duplicar, triplicar, cuadruplicar, etc. una magnitud, se duplica, triplica o cuadruplica la otra. Lo mismo sucede si se calcula la mitad, el tercio, etc., de esas magnitudes.

-Al sumar o restar de dos valores de una de las magnitudes, le corresponde la suma o resta de los valores correspondientes a cada uno de la otra magnitud.

La razón entre dos cantidades es siempre la misma y se llama constante de proporcionalidad.

1) Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.

a) El peso de unos bombones y el dinero que valen.

b) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una distancia.

c) El número de hojas de un libro y su peso.

d) El precio de una tela y los metros comprados.

e) La edad de un alumno y su altura.

f) El número de trabajadores que hacen un edificio y el tiempo que tardan en acabarlo.

g) El número de amigos que hay en una fiesta y la parte de tarta que les corresponde.

h) El número de amigos que hay en una fiesta y el importe que debe pagar cada uno.

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando:

- Al **aumentar** una el doble, el triple,..., la otra **disminuye** la mitad, la tercera parte…
- Al **disminuir** una la mitad, la tercera parte,…, la otra **aumenta** el doble, el triple,...

Es decir, al multiplicar (o dividir) uno de los valores de una magnitud por un número, el valor correspondiente de la otra magnitud queda dividido (o multiplicado) por el mismo número.

2) La siguiente tabla muestra los pintores necesarios para pintar todas las habitaciones de un hotel y los días que tardarían. ¿Son magnitudes directamente inversamente proporcionales? Completa la tabla.

N° de pintores	1	2		6
Días necesarios	24		8	

3) Se quieren transportar 1.200.000 Kg. de patatas de un almacén a distintas tiendas. En un determinado tipo de camión caben 8.000 Kg. ¿Cuántos viajes tendrá que hacer para transportar las patatas? ¿Y si tuviéramos 3 camiones?

a) Completa la siguiente tabla:

N° de camiones	1	2	3	5	8
N° de viajes	150	75	50		

b) ¿Qué tipo de relación se establece entre las magnitudes?

4) A 0º de temperatura, el volumen en litros, y la presión de un gas, medida en atmósferas, determinan la siguiente tabla:

a) Completa la tabla

Volumen (en litros)	10	44,8	5	
Presión (en atmósferas)	2,24	0,5		1

b) ¿Qué tipo de relación se establece entre las magnitudes?

5) Resolver los siguientes problemas de proporcionalidad directa

a) Si 4 pasteles cuestan $120, ¿cuánto costarán 6 pasteles? ¿Y 15 pasteles?

b) El precio de 12 fotocopias es $ 16. ¿Cuánto costará hacer 30 fotocopias?

c) Antonio trabajó 6 días y cobró $3000. Esta semana ha trabajado 5 días. ¿Cuánto cobró?

d) El caudal de un grifo es de 22 litros/minuto. ¿Qué tiempo se necesitará para llenar un depósito de 5,5 metros cúbicos?

6) Resolver los siguientes problemas de proporcionalidad inversa

a) Se está construyendo una autopista y hay que realizar un túnel en la montaña. Está planificado que dos máquinas realicen la obra en 90 días. Para reducir ese tiempo a la tercera parte, ¿cuántas máquinas harían falta?

b) Un depósito de agua se llena en 18 horas si un grifo vierte 360 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto tardaría en llenarse si vertiera 270 litros por minuto? ¿Y si salieran 630 litros por minuto?

c) Un ganadero tiene 36 vacas y pienso suficiente para alimentarlas durante 24 días. Si decide comprar 18 vacas más, ¿para cuántos días tendría pienso?

d) Tres pintores tardan 2 horas en pintar una valla. Si se incorpora un pintor más, ¿cuánto tiempo tardarán?

e) ¿Qué velocidad llevará un automóvil que recorre la misma distancia en la mitad de tiempo? ¿Y una avioneta que emplease 45 minutos?

7) Resolver los siguientes problemas:

a) Si 4 metros de hilo telefónico valen $480, ¿cuánto costarán 7 metros?

b) Si con 38 kilos de cebada obtenemos 3 cervezas, ¿cuántas cervezas saldrán de 114 kilos?

c) Un tren de alta velocidad va de Madrid a Sevilla en 2 horas a una velocidad de 150 kilómetros por hora. ¿Cuántas horas tardará a una velocidad de 200 kilómetros por hora?

d) Un ganadero tiene comida para 75 cerdos durante 180 días. ¿Cuántos tendrá que vender para que le dure la comida un mes más sin variar la ración?

e) Un automóvil gasta 8.3 litros de gasolina cada 100 Km. ¿Cuántos litros gastará en la ida y vuelta entre dos ciudades que se encuentran a 9 km de distancia?

f) La población anterior se abastece de un embalse que contiene 122.5 dam^3 de agua. ¿Para cuánto tiempo tiene reservas, aunque no llueva?

Porcentaje

Un porcentaje es una forma de expresar un número como una fracción de 100 (por ciento, que significa “de cada 100”).

Es a menudo denotado utilizando el signo porcentaje %, que se debe escribir inmediatamente después del número al que se refiere, sin dejar espacio de separación

Por ejemplo: "treinta y dos por ciento" se representa mediante 32% y significa 'treinta y dos de cada cien'. También puede ser representado como 32 / 100

El tanto por ciento como fracción

El tanto por ciento se divide entre 100 y se simplifica la fracción. Ejemplo:

Para saber cómo se representa el 10% en fracción se divide y luego se simplifica:

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Una fracción común como porcentaje

La fracción común se multiplica por 100 y se resuelve la operación, como resultado será el porcentaje.

Ejemplo: Para representar 1/10 como un porcentaje se hace la operación siguiente:

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%$$

Obtener un tanto por ciento de un número

Para obtener un tanto por ciento se construye una regla de tres simple. Ejemplo:

Para calcular el 25% de 150 se hace la regla de tres: multiplica cruzado y divide por el que queda solo.

Por tanto: 37.5 es el 25% de 150

$$\left.\begin{array}{ccc} 100\% & \longrightarrow & 150 \\ 25\% & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \quad x = \frac{150 \cdot 25\%}{100\%} = 37.5$$

Actividades

1) Completa la siguiente tabla:

Porcentaje	15%				45%		85%
Fracción			$\frac{18}{100}$			$\frac{10}{100}$	
Número decimal		0,2		0,3			

2) Completa la tabla:

	250	740	510	480	360	960	1200
40% de							
25% de							
15% de							
20% de							
100% de							

3) ¿Qué porcentaje expresa cada una de estas fracciones?

a) $\frac{1}{2}$ = **c)** $\frac{1}{4}$ = **e)** $\frac{1}{5}$ = **g)** $\frac{1}{10}$ =

b) $\frac{1}{50}$ = **d)** $\frac{3}{4}$ = **f)** $\frac{4}{5}$ = **h)** $\frac{7}{10}$ =

4) Completa las tablas:

Precio	Descuento	Nuevo precio
270	15%	
300	35%	
52	30%	
880	25%	

Precio	Incremento	Nuevo precio
225	5%	
72	3%	
420	8%	
100	10%	

5) Resolver los siguientes problemas:

a) El número de espectadores de un concurso de televisión que comenzó en octubre aumentó un 23% en noviembre y disminuyó un 18% en diciembre. Si al terminar diciembre tuvo 2202000 espectadores. ¿Cuántos tenía en el mes de octubre?

b) El 20% de los alumnos de 1º de BAC hicieron mal un examen. Si el grupo está formado por 45 alumnos. ¿Cuántos contestaron correctamente?

c) Si un comerciante aumenta el precio de sus productos un 25% y, después los rebaja un 25%, ¿cuál ha sido la variación porcentual que experimentan los artículos respecto al precio inicial? ¿Y si hiciera lo mismo aplicando el 50%?

d) A una persona le retienen de su sueldo un 12%. Si cobra mensualmente $28360 ¿Cuál será el sueldo bruto?

e) El 0,8% de la población masculina de una ciudad de 400.000 de habitantes padece de asma. ¿Cuál es el número de enfermos si el 60% de la población son mujeres?

f) En las elecciones el porcentaje de abstención en una empresa fue del 25%. Sabiendo que el número de votantes fue de 240 trabajadores. ¿Cuántos son en total?

g) Si pagué $840,6 en un restaurante con 21% de I.V.A. ¿cuál sería la factura sin I.V.A.?

Álgebra y funciones

Lenguaje coloquial y simbólico

1) Indica las expresiones algebraicas de las siguientes frases:
   a) El doble de un número.
   b) El cuadrado de un número menos tres.
   c) La suma de dos números.
   d) La diferencia de los cuadrados de dos números.
   e) La mitad de un número.
   f) El cuádruplo de un número.
   g) La suma de un número y su cuadrado.
   h) El doble de un número menos cinco.
   i) La tercera parte de un número.
   j) El cuadrado de la suma de dos números.
   k) El doble de la suma de tres números.
   l) El triple de la raíz cuadrada de un número.
   m) La suma de tres números consecutivos.
   n) Una cuarta parte de la suma de dos números.
   ñ) Un número aumentado en cinco unidades.
   o) El doble de un número menos el triple de otro.
   p) Las tres cuartas partes de un número.
   q) El cubo de la diferencia de dos números.
   r) El producto de dos números.
   s) La décima parte de un número más el quíntuplo de otro.

2) Elige la respuesta adecuada

Expresión algebraica	**Elige la respuesta adecuada**
a) la mitad de un número	A) x^2 B) $2 \cdot x$ C) $x/2$
b) el doble de un número más tres	A) $x/2 + 3$ B) $2 \cdot (x + 3)$ C) $2x + 3$
c) el triple de un número menos cuatro	A) $x - 3 \cdot 4$ B) $3 \cdot 4 - x$ C) $3x - 4$
d) la mitad del cubo de un número	A) $\frac{x^3}{2}$ B) $\frac{3}{2} \cdot x$ C) $3 \cdot x /2$
e) siete menos un número	A) $7 - x$ B) $7 - 3$ C) $x - 7$
f) el doble de la suma de dos números	A) $2 \cdot (m + n)$ B) $2 \cdot m + n$ C) $m + n \cdot 2$

g) la edad de una persona hace cinco años	A) 5 - x B) 32 - 5 C) x - 5
h) el cuadrado más el triple de un número	A) $x^2 + 3 \cdot x$ B) $32 + 3 \cdot x$ C) $x + 32$
i) la quinta parte del triple de un número	A) $3 \cdot 5 / x$ B) $3 \cdot x / 5$ C) $x/3 \cdot 5$
j) el triple de la suma de tres números	A) $a + b + c \cdot 3$ B) $3 + a + b + c$ C) $3 \cdot (a + b + c)$

3) Escribe una expresión algebraica que de:

a) El perímetro de un triángulo equilátero de lado x

b) El perímetro de un rectángulo de base x cuya altura mide 1 cm menos que su base.

c) El área de un rectángulo de base x cuya altura mide 6 cm menos que su base.

d) El 30% de un número.

e) El área de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida.

f) El perímetro de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida.

g) El doble del resultado de sumarle a un número entero su siguiente.

h) El triple del resultado de sumar un número con su inverso.

i) El doble de la edad que tendré dentro de cinco años.

j) El quíntuplo del área de un cuadrado de lado x.

k) El área de un triángulo del que se sabe que su base es la mitad de su altura.

4) Representamos por x el número de coches que hay en un aparcamiento y por y el número de motos. Escribe una expresión algebraica que indique el número de ruedas que hay en total.

5) Calcula el valor numérico de $4a^2-7$ para:

a) a = 1 b) a = 2 c) a = 0 d) a = -1 e) a = -2

6) Calcula el valor numérico de $2x^3-5x$ para:

a) x = 1 b) x = 2 c) x = 0 d) x = -1 e) x = -2

7) Calcula el valor numérico de 2a-3b para:

a) a = 1 , b = 2 b) a = -1 , b = 2 c) a = 0 , b = -2 d) a = -1 , b = -1

<u>Ecuaciones</u>

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(x+2)^2-6=10$ x= 2

b) $\sqrt{x+3}.5+1=11$ x= 1

c) $(x^4-6)2+3=8$ x= 2

d) $(\sqrt{x}+2)^2-9=40$ x= 25

e) $(\sqrt{x+1}.3-1):5=1$ x=3

q) $1-\frac{2}{3}(x-3)=2-\frac{1}{4}(3x-4)$ *(Soluc: x=0)*

r) $2-4\left(\frac{2x}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{2}-x$ *(Soluc: x=-1/2)*

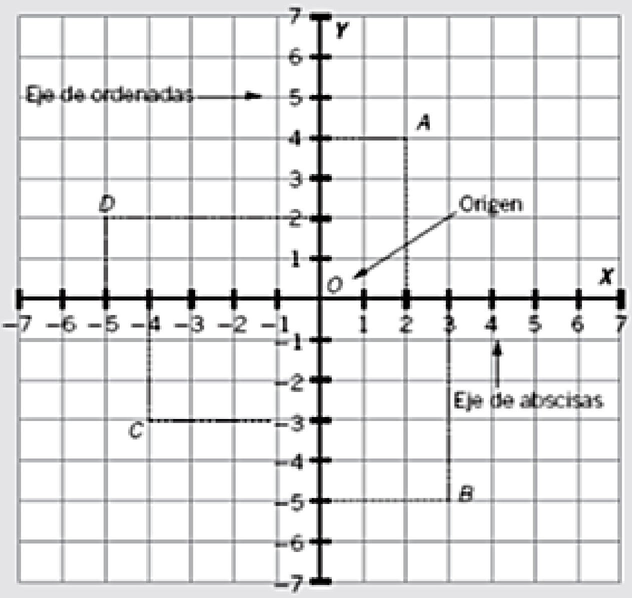
s) $5x-3\left(3-\frac{x}{4}\right)=\frac{7x}{2}-3$ *(Soluc: x=8/3)*

t) $5\left(\frac{2x}{3}-\frac{3x}{5}\right)+1=2x-2(x-1)$ *(Soluc: x=3)*

Introducción al análisis funcional

EJES CARTESIANOS EN EL PLANO

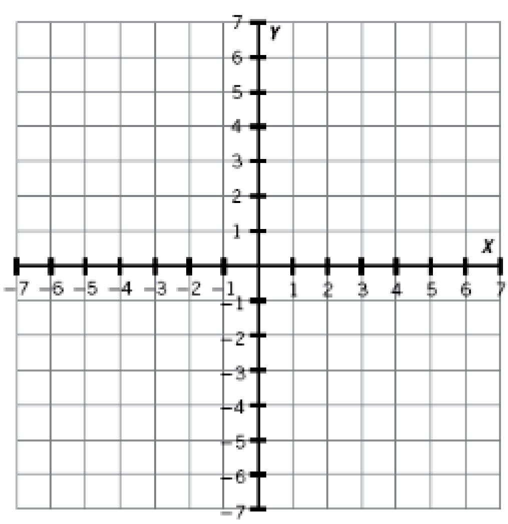
- Para representar puntos en el plano, utilizamos un sistema formado por dos rectas perpendiculares llamado **sistema de ejes cartesianos**.
  - En la **recta *X*** o **eje de abscisas** se representan los números enteros de forma horizontal.
  - En la **recta *Y*** o **eje de ordenadas** se representan los números enteros de forma vertical.
  - El punto donde se cruzan se llama **origen** y es el valor cero, 0, en cada recta.
- Cada punto en el plano tiene dos referencias numéricas llamadas **coordenadas**.
  - El primer número corresponde a la **coordenada *x***.
  - El segundo número corresponde a la **coordenada *y***.



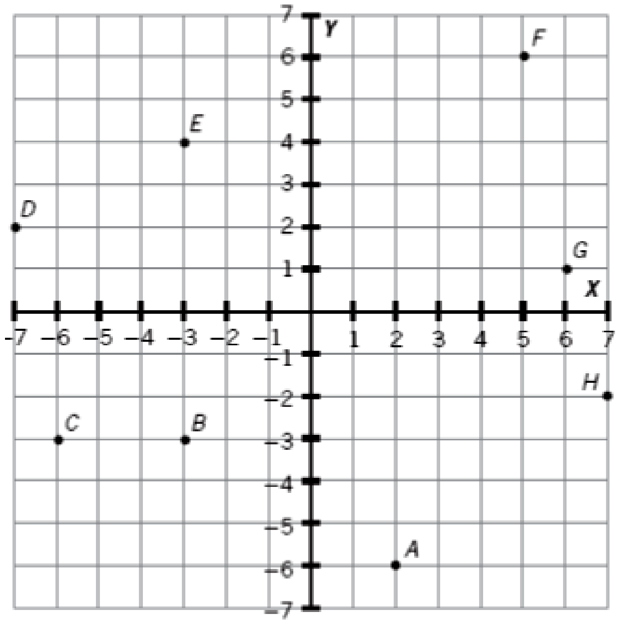
PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(+2, +4)	+2	+4
B	(+3, −5)	+3	−5
C	(−4, −3)	−4	−3
D	(−5, +2)	−5	+2

1) Completa la tabla y representa

PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(−2, −4)		
B	(+3, +6)		
C	(+5, −3)		
D	(−1, +7)		
E	(+4, 0)		
F	(−4, 0)		



2) Observa los siguientes puntos y representa.



PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(+2, −6)		
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			

FUNCIONES

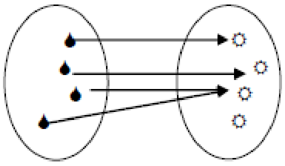
Una **función** es una relación de dependencia entre una **variable** dependiente (Y) y una **variable** independiente (X). En otras palabras, la **variable** dependiente (Y) toma valores determinados en **función** (dependiendo) de los valores que tome la **variable** independiente (X). Para que una relación sea función se deben cumplir dos condiciones:

- **Condición de existencia**: para todo valor de la variable independiente existe un valor de la variable dependiente que le corresponde.
- **Condición de unicidad**: Cada valor de la variable independiente está relacionado con un único valor de la variable dependiente.

¿CÓMO SE NOS PRESENTAN?

Tanto en un contexto matemático, como en la vida cotidiana, nos encontramos a menudo con funciones. Se nos presentan de diferentes maneras:

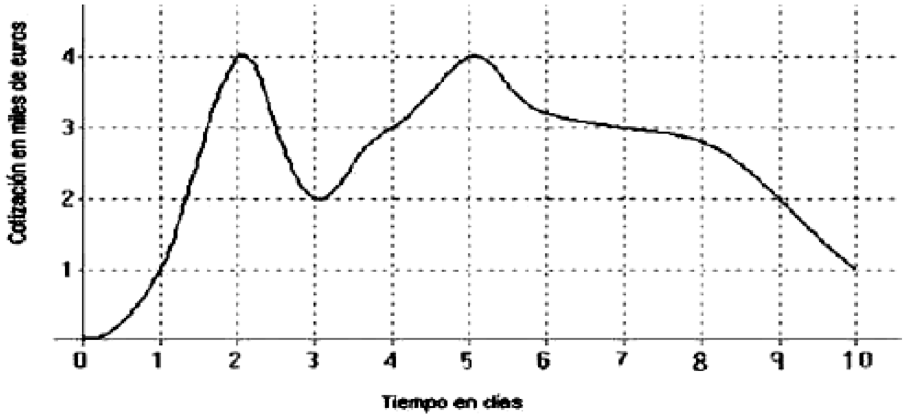
I- Por diagrama de flechas



II- Mediante una tabla de valores.

x (horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y (miles)	3	6	12	24	48	96	192	384	768

III- Mediante su representación gráfica.

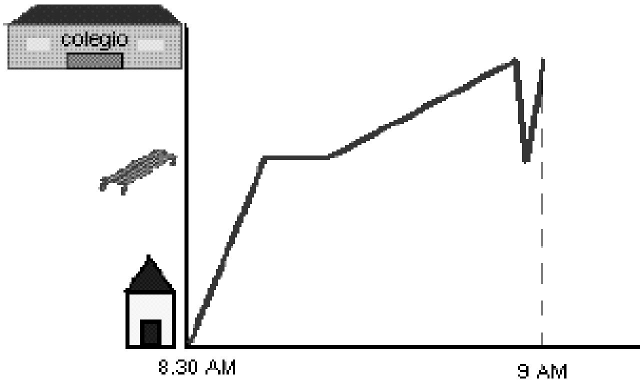


IV- Mediante su expresión analítica o fórmula.

$$f(x) = x + 1$$

V- Mediante un enunciado.

"Un padre que estuvo observando desde el balcón a su hijo Alberto como iba al colegio:
.-De casa salió a las 8.30 y fue seguidito hasta casa de su amigo Tomás. Lo esperó un rato sentado en el banco y luego se fueron juntos, muy despacio, hacia el colegio. Cuando ya estaban llegando, mi hijo se dio cuenta de que se había dejado la cartera en el banco; volvió corriendo, la recogió y llegó a la escuela a las 9 en punto."



Este enunciado representa una función que describe la distancia a la que se encuentra Alberto según el instante entre las 8.30 y las 9.00 de la mañana, y su gráfica aproximada es la representada a la derecha.

Actividades

1. Decidir razonadamente si las siguientes correspondencias son funciones o no. En las que sí lo sean, indicar cuál representa la variable independiente y cuál la dependiente.

a. A todo número natural se le hace corresponder su número natural siguiente.

b. A todo número natural se le asocian sus divisores.

c. A cada día del año se le asocia la cotización del euro frente al dólar.

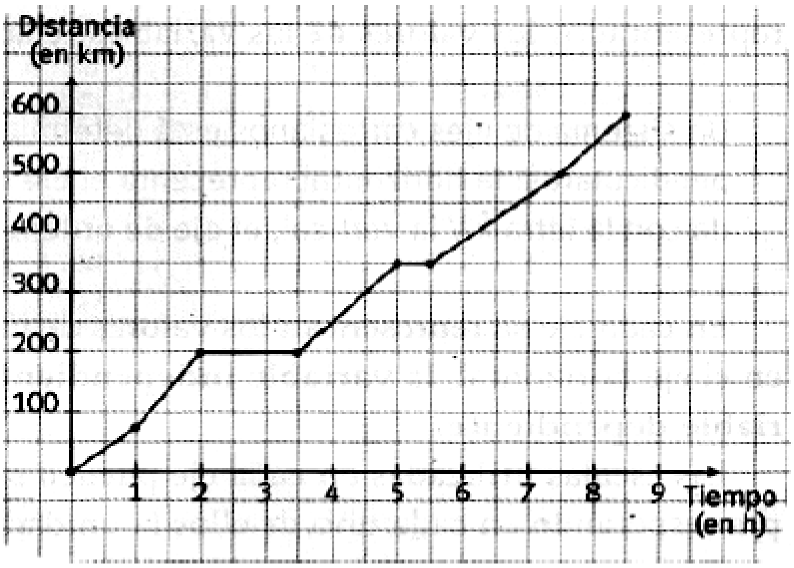
d. A todo número fraccionario se le asocia su inverso.

e. A todo número se le asocia su raíz cuadrada.

f. A cada fase de la luna le asociamos la fecha en la que se da dicha fase.

g. A todo número se le asocia su doble más siete.

2. El siguiente gráfico muestra la distancia recorrida por un automóvil a medida que transcurre el tiempo



De acuerdo con el gráfico respondan:

a) ¿Qué distancia recorrió en las primeras 2 horas de marcha?..............

b) ¿Durante cuánto tiempo estuvo detenido?..

c) ¿Cuánto tardó en recorrer 300 metros?..

d) ¿Qué distancia recorrió entre las paradas?..

e) ¿Cuántos kilómetros recorrió durante las últimas 3 hs?....................