Escuela Normal "José María Torres"

Espacio curricular: Matemática

Año: 6to

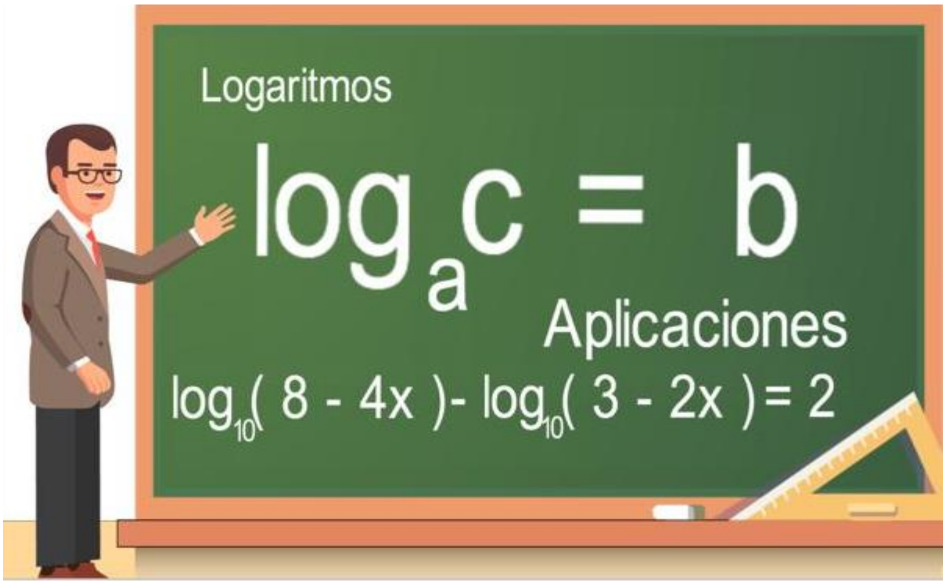
Divisiones: 2da, 3era, 4ta y 5ta.

Profesoras: Lidya Caffaro, Andrea Cian y Andrea Martínez.

Clase N° 9

Contenidos:

- ***Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.***



Ecuaciones exponenciales

Recordemos:

Los logaritmos como una extensión de la potenciación

A partir de la expresión: $b^n = p$ (b: base; n: exponente; p: potencia)

podemos plantear tres ecuaciones dependiendo cuál de sus elementos se considera como incógnita, como se aprecia en el siguiente cuadro.

$b^n = p$

Incógnita: potencia = x

La incógnita se calcula mediante la operación llamada: **potenciación**

$b^n = x \Rightarrow \boxed{x = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{"n" veces}}}$

Incógnita: base = x

La incógnita se calcula mediante la operación llamada: **radicación**

$x^n = p \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[n]{p}}$

Incógnita: exponente = x

La incógnita se calcula mediante la operación llamada: **logaritmación**

$b^x = p \Rightarrow \boxed{x = \log_b p}$

Las ***ecuaciones exponenciales*** son aquellas en las que la incógnita aparece en un exponente o en más de uno.

Para resolverlas, tendremos presente que:

- Siempre que sea posible, es conveniente expresar ambos miembros como potencias de una misma base.
- Para despejar incógnitas que aparecen en el exponente, es posible usar logaritmos.
- Cualquier logaritmo puede obtenerse con una calculadora científica.

Ejemplos

La ecuación por la que empezamos es una igualdad entre una exponencial y un número entero que puede escribirse como una potencia con la misma base que la exponencial.

- **Ecuación 1**

$$3^x = 27$$

Podemos escribir 27 como la potencia $3^3 = 27$ De este modo, la ecuación queda como:

$$3^x = 3^3$$

Tenemos una igualdad entre dos potencias con la misma base.

Para que la igualdad sea cierta, ambas potencias deben tener el mismo exponente:
$x = 3$

- **Ecuación 2**

$$2^{x+2} = 16$$

Escribimos 16 como una potencia de 2:

$$16 = 2^4$$

Podemos reescribir la ecuación como

$$2^{x+2} = 2^4$$ *Bases iguales, exponentes iguales*

Por tanto, igualando los exponentes,

$$x + 2 = 4 \quad \rightarrow$$ Despejando x

$$x = 4 - 2 = 2$$

Luego la solución de la ecuación exponencial es x=2

- **Ecuación 3**

$$(2^{x+1})^2 = 64$$

Escribimos 64 como una potencia de 2:

$$64 = 2^6$$

Operamos en la ecuación usando las propiedades de las potencias

$$2^{2(x+1)} = 2^6$$ Aplicamos prop. distributiva

Bases iguales exponentes iguales

$$2^{2x+2} = 2^6$$

Por tanto, obtenemos una ecuación de primer grado:

$$2x + 2 = 6 \quad \rightarrow$$ Despejamos x

$$2x = 4 \quad \rightarrow$$

$$x = 2$$

- **Ecuación 4**

$$9^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

Expresamos 9 y $\frac{1}{3}$ como potencias de base 3.

$$(3^2)^{x-1} = (3^{-1})^{2x}$$

Aplicamos la propiedad de *potencia de potencia*:

$$3^{2x-2} = 3^{-2x}$$

Bases iguales, exponentes iguales, entonces igualamos los exponentes:

$$2x - 2 = -2x$$

Despejamos x:

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

❖ A veces escribiremos las exponenciales como un producto de potencias de igual base para poder resolver la ecuación.

Ecuación 5

Resolver la ecuación escribiendo la exponencial como un producto:

$$2^{x+1} + 5 \cdot 2^x = 28$$

Escribimos la exponencial como un producto: *suma de exponentes viene de la multiplicación de potencias de igual base*

$$2^{x+1} + 5 \cdot 2^x = 28$$

$$2 \cdot \boxed{2^x} + 5 \cdot \boxed{2^x} = 28$$

Podemos extraer factor común de 2^x:

$$\boxed{2^x}(2+5) = 28$$

$$7 \cdot 2^x = 28$$

$$2^x = \frac{28}{7}$$

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

Ecuación 6

$$2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$$

Aplicando las propiedades de las potencias, en un cálculo auxiliar descomponemos la expresión:

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2^x \cdot 2\ ;$$

$$2^{x-1} = 2^x \cdot 2^{-1} = \frac{2^x}{2}$$

Con lo que podemos reescribir la ecuación como:

$$2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$$

$$2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2} = 20$$

De este modo podemos extraer factor común de 2^x:

$$2^x\left(2+\frac{1}{2}\right)=20$$

$$2^x\left(\frac{4+1}{2}\right)=20$$

$$2^x\cdot\frac{5}{2}=20$$

$$2^x=20\cdot\frac{2}{5}$$

$$2^x=8=2^3$$

Es decir, la solución es *x=3.*

- ***Cuando las bases de las potencias no son las mismas, recurrimos a la nueva operación para despejar***

- **Ecuación 7**

$2^x=5$ *-las bases no son iguales por lo tanto no podemos aplicar las mismas estrategias anteriores, por lo cual vamos a recurrir a la séptima operación ya que la incógnita es un exponente, y para conocer exponentes existe la logaritmación.*

En este caso, por sencillez y porque los tenemos disponibles en la calculadora, aplicamos *logaritmos decimales* a ambos miembros:

$$2^x=5$$

$$\log(2^x)=\log 5$$

$x\,.\log 2=\log 5$ Aplicamos la propiedad del *logaritmo de una potencia*

$x=\dfrac{\log 5}{\log 2}$ Despejamos x

$x\approx 2{,}32$ Con la calculadora obtenemos x con la cantidad de decimales que nos interesen. *No usamos el símbolo = sino aproximado como ocurría en trigonometría.*

Ecuaciones logarítmicas

Una **ecuación logarítmica** es una ecuación cuya incógnita (o incógnitas) se encuentra multiplicando o dividiendo a los logaritmos, en sus bases o en el argumento de los logaritmos (dentro de los logaritmos).

Ejemplos

- Incógnita en el argumento: ***log_2 (2x + 4) = 3***

- Incógnita en la base: ***log_x (7) = 3***
- Incógnita multiplicando: ***x . log (3) + 5 = x . log (9)***

Nos vamos a centrar en las ecuaciones logarítmicas con la incógnita en los argumentos (como la primera ecuación de los ejemplos).

Para poder resolver la ecuación es imprescindible conocer las propiedades de los logaritmos y las propiedades de las potencias. Además, la resolución de estas ecuaciones conlleva la resolución de otro tipo de ecuaciones: ecuaciones lineales, de segundo grado, etc.

Recordatorio

- Si dos logaritmos (en la misma base) son iguales, sus argumentos también:

  $\log_b (x) = \log_b (y) \Rightarrow x = y$

- El argumento de un logaritmo **debe ser positivo** (es recomendable **comprobar** que las soluciones no hacen que los argumentos sean no positivos).
- La base de un logaritmo debe ser positiva y distinta de 1.
- Si no se indica la base, consideraremos que es la decimal:

$$\log (x) = \log_{10} (x)$$

Ejemplos:

1 $log(x) = 2$

Para resolver esta ecuación basta con aplicar la definición de logaritmo:

$$10^2 = x$$

$$100 = x$$

$$x = 100$$

2 $log(x^2) = 8$

Podemos aplicar la propiedad: $log A^n = n \cdot log A$, despejar y posteriormente la definición.

$$2 \cdot log(x) = 8$$

$$log(x) = \frac{8}{2}$$

$$log(x) = 4$$

$$10^4 = x$$

$$x = 10000$$

3 $log_4(4 - 3x) = 3$

Aplicamos la definición y luego despejamos la variable x

$$4^3 = 4 - 3x$$

$$64 = 4 - 3x$$

$$3x = 4 - 64$$

$$3x = -60$$

$$x = -20$$

Ejemplo 4

log (2) + log (x+3) = log (x+5)

Aplicamos reciproca de la propiedad, entonces: La suma de dos logaritmos es el logaritmo del producto:

log (2·(x+3)) = log (x+5)

log (2x+6) = log (x+5)

Como los dos logaritmos son iguales, sus argumentos tienen que ser iguales. Por tanto,

2x+6 = x+5

Resolvemos la ecuación de primer grado:

2x−x = 5−6

X = −1

Es recomendable que siempre compruebes que los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial son positivos al sustituir la solución obtenida.

Comprobamos si la solución es válida:

$x+3 = -1+3 = 2 > 0$

$x+5 = -1+5 = 4 > 0$

La solución de la ecuación logarítmica es $x=-1$.

Ejemplo 5

$$\log(3) + \log(x-1) = \log(2) + \log(x+1)$$

Aplico la reciproca del producto de los logaritmos en ambos lados de la igualdad (multiplicando sus argumentos):

$\log(3\cdot(x-1)) = \log(2\cdot(x+1))$

$\log(3x-3) = \log(2x+2)$log

Igualamos los argumentos y resolvemos la ecuación:

$3x-3 = 2x+2$

$3x-2x = 2+3$

$x=5$

La solución de la ecuación logarítmica es $x=5$

Ejemplo 6

$$2\log x - \log(x+6) = 0$$

El 2 que multiplica al logaritmo puede introducirse como el exponente de su argumento. Así, podremos sumar los logaritmos:

$$2\log x - \log(x+6) = 0 \rightarrow$$
$$\log x^2 - \log(x+6) = 0 \rightarrow$$
$$\log\left(\frac{x^2}{x+6}\right) = 0 \rightarrow$$

Recordemos que un logaritmo es 0 cuando su argumento es 1, por tanto, igualamos el argumento a 1 y resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida:

$$\frac{x^2}{x+6} = 1 \quad \rightarrow$$

$$x^2 = x + 6 \quad \rightarrow$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Observemos que la **única solución** posible es x=3 ya que los argumentos tienen que ser positivos.

Ejemplo 7

$$\log(x+1) - \log x = 1$$

Escribimos 1 como el logaritmo de 10 para poder aplicar las propiedades de los logaritmos e igualar los argumentos:

$$\log(x+1) - \log x = 1 \rightarrow$$

$$\log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log 10 \quad \rightarrow$$

$$\frac{x+1}{x} = 10 \quad \rightarrow$$

$$x + 1 = 10x \quad \rightarrow$$

$$9x = 1 \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{1}{9}$$

La solución de la ecuación logarítmica es x=1/9.

Actividades de aplicación.

1) Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas. Fundamenta cada paso.
   a) $\text{Log}_2 (x + 2) = 5$
   b) $\text{Log}_2 (25 – x) = 3$
   c) Log (x + 4) = log x + log 5
   d) Log x + log (x -1) = log (4x)
   e) Log x + log 25 = 5
   f) Log (x + 2) + log (x – 1) = 1

2) Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales. Explica cada paso.
   a) $3^{x+2} = 7$
   b) $36^{x+3} = 6^{x+2}$

c) $5^{2x+5} = 5^{x-1}$

d) $2^{2x-1} = 4$

e) $7^{x+3} = \frac{1}{7}$

3) Problemas de aplicación

a)

Transparencia de un lago Científicos ambientalistas miden la intensidad de luz a varias profundidades en un lago, para hallar la "transparencia" del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población macroscópica sumergida. En cierto lago, la intensidad de luz a una profundidad x está dada por

$$I = 10e^{-0.008x}$$

donde I se mide en lumen y x en pies.

(a) Encuentre la intensidad I a una profundidad de 30 pies.

(b) ¿A qué profundidad la intensidad de luz habrá bajado a $I = 5$?

b)

Enfriamiento de un motor Supongamos que el lector está manejando su auto en un frío día de invierno (20ºF al exterior) y el motor se sobrecalienta (a unos 220ºF). Cuando se estaciona, el motor empieza a enfriarse. La temperatura T del motor t minutos después de estacionarlo satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T-20}{200}\right) = -0.11t$$

(a) De la ecuación, despeje T.

(b) Use la parte (a) para hallar la temperatura del motor después de 20 minutos ($t = 20$).

En el ***Buzón de Tareas de la Clase 9*** de la plataforma ARANDU deberán entregar ***todas las actividades resueltas.***

Las ***fotos*** de las actividades deben ser enviadas en un archivo ***PDF.*** Recuerden que las fotos deben ser ***claras y legibles, y no deben estar al revés o de costado***, para poder corregirlas y realizar la devolución.

<u>Tiempo de realización de esta actividad: 26/10 al 6/11</u>

Aviso: en la **próxima clase** realizarán una **autoevaluación** (similar a la realizada en la primera etapa en el Blog de Matemática) que **integra todos los contenidos desarrollados durante el año**, por lo que les recomendamos hacer una revisión de los conceptos, propiedades y actividades trabajados a lo largo de esta etapa de virtualidad.