Escuela Normal "José María Torres"
Espacio Curricular: Matemática
Año: 5°
Divisiones: 1° y 3°
Profesoras: Andrea Martínez.

Contenidos:

- ✓ **Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado en una variable. Conjunto solución.**
- ✓ **Discriminante: clasificación de las soluciones.**

Clase 9

En esta clase completamos nuestro estudio de la función y ecuación cuadrática. Hemos visto la gráfica y ahora nos ocuparemos de conocer cómo resolver una ecuación, cuando el mayor exponente de la variable es 2.

Contemplaremos para la explicación la expresión de la ecuación cuadrática completa.

Ecuaciones cuadráticas

Recordamos que la forma general de una ecuación cuadrática o de segundo grado es

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}}$$

Donde $a \neq 0$, b y c los coeficientes.

*Una ecuación cuadrática es **completa** cuando los coeficientes b y c también son distintos de 0.*

Discriminante

Llamamos **discriminante**, Δ, de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ a

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Radicando en la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

El signo del discriminante informa acerca del número de soluciones de la ecuación:

- $\Delta = 0$, Si Δ es 0, la ecuación tiene **una única solución** (de **multiplicidad** 2)
- $\Delta < 0$, Si Δ es negativo, **no existen soluciones reales**
- $\Delta > 0$, Si Δ es positivo, existen **dos soluciones** (reales) distintas.

Ejemplos de cálculo del discriminante en primer lugar y luego las raíces:

Ejemplo I: Resuelve la ecuación $\mathbf{2x^2 + 5x - 3 = 0}$ los coeficientes son: $a= 2$; $b= 5$; $c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4.2.(-3) = 49 > 0$ positivo entonces tendrá dos raíces reales distintas, ahora las calculo:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -3$

El conjunto solución se expresa de la forma:

Solución= {x_1; x_2}

Solución= {1/2; -3}

Ejemplo II: Resuelve la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ los coeficientes son: $a= 1$; $b= -2$; $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4.1.1 = 0$ tendrá dos raíces reales iguales, hacemos el cálculo:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$

Soluciones: $x_1 = x_2 = 1$

El conjunto solución se expresa de la forma:

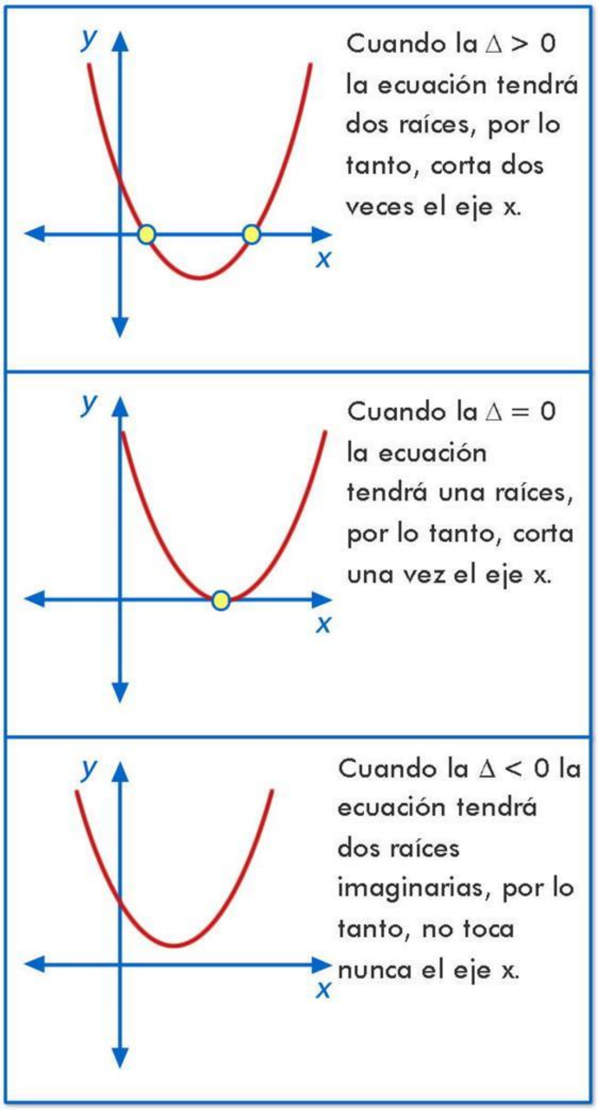
Solución= {1; 1}

Ejemplo III: Resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$ los coeficientes son: $a= 1$; $b= -4$; $c = 13$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4.1.13 = 16 - 52 = -36 < 0$ valor negativo, por lo tanto no tienen raíces reales como solución. No debemos hacer el cálculo con la formula resolvente.

Por esta razón vamos a usar el discriminante primero para saber qué tipos de soluciones tenemos y luego calcularlas si es posible.

Esto en la gráfica se ve de la siguiente forma:



Soluciones

Entonces, en resumen podemos decir que las **soluciones** (o **raíces**) de la ecuación de segundo grado (en la forma anterior) vienen dadas por la **fórmula resolvente**:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Luego las raíces son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

El conjunto solución se expresa de la forma:

Solución= {x_1; x_2}

Problemas

Los siguientes son problemas resueltos para que tengas una guía de como plantear y encontrar las solución /es según el contexto.

- **El producto de las edades de Luisa y su hermano, que tiene 5 años menos que ella, es 176. ¿Cuántos años tienen ambos?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Edad de Luisa: } x\\ \text{Edad de su hermano: } x-5\end{array}\right\} \rightarrow x(x-5)=176 \rightarrow x^2-5x-176=0$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2+4\cdot 176}}{2}=\frac{5\pm 27}{2}\qquad \begin{cases}x_1=16\\ x_2=-11\end{cases}$$

La segunda solución no es válida (una edad no puede ser negativa), así que la edad de Luisa es 16 años y la de su hermano: $16-5=11$ años.

- **Si un campo de fútbol mide 30 m más de largo que de ancho y su área es de 7 000 m², halla sus dimensiones.**

Ancho: x. Largo: $x+30 \rightarrow x(x+30)=7\,000 \rightarrow x^2+30x-7\,000=0$

$$x=\frac{-30\pm\sqrt{900+28\,000}}{2}=\frac{-30\pm\sqrt{28\,900}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases}x_1=\dfrac{-30+170}{2}=70\\[2mm] x_2=\dfrac{-30-170}{2}=-100\end{cases}$$

Las dimensiones son 70 m de ancho y 100 m de largo. La otra solución no es válida por ser negativa.

- Cuando se lanza un cohete casero desde el suelo, sube y cae describiendo una parábola. La altura, en pies, de un cohete casero está dada por la ecuación $h(t) = 160t - 16t^2$ donde t es el tiempo en segundos. ¿En cuánto tiempo el cohete vuelve al suelo?

Al volver al suelo h(t)= 0

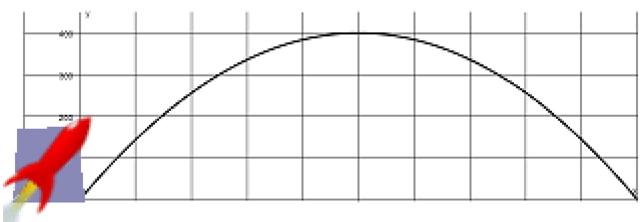
$160t - 16t^2 = 0$

Reordenando:

$-16t^2 + 160t = 0$

Ya quedó planteada la ecuación ahora calculo las raíces.

h(t)



t

Actividades

1) Siendo $ax^2 + bx + c = 0$; la expresión general de una ecuación de 2º, marca con un circulo en (V) si es verdadera o en la (F) si es falsa según corresponda.

A. "c" es el término lineal. (V) (F)

B. "a" debe ser diferente de cero. (V) (F)

C. "ax^2" es el término independiente. (V) (F)

D. "bx" es el término de 1er grado. (V) (F)

2) Dada la siguiente expresión:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; responde (V) o (F) según corresponda:

a. "$b^2 - 4ac$" es el discriminante. (…)

b. "c" es el coeficiente del término lineal. (…)

c. "a" es el coeficiente del término de 2º. (…)

3) Determinar el tipo y número de soluciones de la ecuación:

a) $3x^2 - 5x + 1 = 0$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

4) En la siguiente ecuación, hallar el conjunto solución:

$$\mathbf{x(x + 2) + 5 = 3(2 - x) + x - 4}$$

5) Analiza y resuelve:

I) Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, cuya ecuación de altura es:

$$\mathbf{y = -16t^2 + v_o\, t}$$

Donde $\mathbf{v_o}$ es le velocidad inicial de lanzamiento. El objeto es lanzado con una velocidad de 400 m/seg.

a. ¿En qué tiempo el objeto regresa al suelo?
b. ¿Cuánto tarda en alcanzar 2.500 m. de altura?

II) En una planta industrial el costo mensual de producir x unidades está dado por la expresión:

$$\mathbf{c\,(x) = 10x^2 - 100x - 2.000}$$

¿Cuántos productos se pueden fabricar para un costo de 10.000 pesos?