Escuela Normal "José María Torres"
Espacio Curricular: Matemática
Año: 4°
Divisiones: Todas
Profesoras: Andrea Martínez, Lidya Caffaro y Roxana Boxler

Contenidos:

Operaciones con polinomios:

- ✓ Multiplicación de monomios y polinomios.
- ✓ División de un polinomio por un monomio

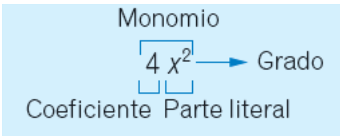
Clase 9: Operaciones con polinomios

Recordemos:

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número y una o varias letras.

El número recibe el nombre de **coeficiente**, y las letras, con sus exponentes, son la **parte literal**.

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de las letras que lo forman.



Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o la resta de dos o más monomios no semejantes.

Cada uno de los monomios se llama **término**, y si no tiene parte literal, **término independiente**.

El mayor de los grados de todos sus términos se denomina **grado** del polinomio.

El coeficiente que acompaña al término de mayor grado se denomina **coeficiente principal**.

SE ESCRIBE ASÍ

Para designar los polinomios utilizamos una letra mayúscula, indicando entre paréntesis las letras que aparecen en el polinomio.

$$P(x) = 5x^3 - 2x^4 + 7$$

En el ejemplo de la derecha, el término independiente es 7, el grado es 4 y el coeficiente principal es -2.

Un polinomio está **ordenado** con respecto a una variable cuando sus grados van en orden ascendente o descendente.

Un polinomio está **completo** con respecto a una variable si aparece un término de cada grado, desde el grado mayor hasta grado cero.

Siguiendo con el ejemplo de la derecha, podemos ordenar el polinomio P según los grados de sus términos:

$$\mathbf{P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 7}$$ → **Polinomio ordenado**

Y también podemos completar los términos faltantes:

$$\mathbf{P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 0x^2 + 0x + 7}$$ → **Polinomio completo y ordenado**

Si en un término, una variable **no posee exponente**, entonces su **grado** es **1**.
Si un término **no posee variable**, entonces su **grado** es **0**.

Los **monomios o términos semejantes** son aquellos que poseen igual parte literal. Por ejemplo:

$$-4x^3 \quad \text{y} \quad \frac{3}{5}x^3 \rightarrow \textbf{Son semejantes}$$

La **suma (o resta)** de monomios semejantes se realiza sumando (o restando) los coeficientes y manteniendo la misma parte literal.

Si los monomios no son semejantes, la suma o la resta se deja indicada.

EJEMPLO

Haz la suma y la resta de estos monomios.

a) $7ab^4$ y $3ab^4$ Son semejantes $\longrightarrow \begin{cases} 7ab^4 + 3ab^4 = (7+3)ab^4 = 10ab^4 \\ 7ab^4 - 3ab^4 = (7-3)ab^4 = 4ab^4 \end{cases}$

b) $7b^4$ y $3ab^4$ No son semejantes $\rightarrow \begin{cases} 7b^4 + 3ab^4 \\ 7b^4 - 3ab^4 \end{cases}$

Suma y resta de polinomios

Para **sumar polinomios** sumamos sus monomios semejantes, dejando indicada la suma de los monomios no semejantes. Para **restarlos**, sumamos al primero el polinomio opuesto del segundo.

EJEMPLO

Realiza estas operaciones, $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, siendo:

$P(x) = -x^5 + 4x^3 - 5x + 1 \qquad Q(x) = -2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 7$

Para sumar, disponemos en columna los monomios semejantes y completamos los polinomios:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & -x^5 & +0x^4 & +4x^3 & +0x^2 & -5x & +1 \\ + & & -2x^4 & -3x^3 & +x^2 & +5x & -7 \\ \hline P(x)+Q(x) \rightarrow & -x^5 & -2x^4 & +x^3 & +x^2 & +0x & -6 \end{array}$$

Para restar, determinamos primero el polinomio opuesto del segundo:

$$Q(x) = -2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 7 \xrightarrow{\text{Opuesto}} -Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 7$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & -x^5 & +0x^4 & +4x^3 & +0x^2 & -5x & +1 \\ + & & 2x^4 & +3x^3 & -x^2 & -5x & +7 \\ \hline P(x)-Q(x) = P(x) + (-Q(x)) \rightarrow & -x^5 & +2x^4 & +7x^3 & -x^2 & -10x & +8 \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Comencemos viendo *cómo multiplicar DOS MONOMIOS:*

La **multiplicación** de dos o más **monomios** es otro monomio en el que

- El coeficiente es el producto de los coeficientes de los factores.
- Las variables son el producto de las variables de los factores, aplicando la propiedad para el producto de potencias de igual base: $x^a x^b = x^{a+b}$.
- El grado es igual a la suma de los grados de los monomios factores.

Por ejemplo, si queremos multiplicar $-4x^3$ y $7x^4$, multiplicamos los coeficientes y sumamos los grados:

$$-4x^3 \,.\, 7x^4 = -4 . 7 . x^{3+4} = -28x^7$$

Teniendo en cuenta esto, ya estamos en condiciones de ver *cómo multiplicar un MONOMIO por un POLINOMIO:*

Para **multiplicar un monomio por un polinomio**, multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

EJEMPLO

Multiplica el polinomio $P(x) = -x^5 + 4x^3 - 5x + 1$ por el monomio $3x^2$.

Resolveremos esta multiplicación de forma vertical, ubicando primero el polinomio y debajo el monomio. Es conveniente ubicar el polinomio de forma ordenada. Multiplicamos el monomio por cada término del polinomio, comenzando desde la derecha (con el término de menor grado):

$$\begin{array}{rr} & -x^5 + 4x^3 - 5x + 1 \\ & \times \;\; 3x^2 \\ \hline \boxed{3x^2 \cdot P(x) \rightarrow} & \boxed{-3x^7 + 12x^5 - 15x^3 + 3x^2} \end{array}$$

Ahora sí, veamos *cómo multiplicar DOS POLINOMIOS:*

Para **multiplicar dos polinomios**, debemos multiplicar cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio, y reducir los términos semejantes.

EJEMPLO

Multiplica los polinomios $P(x) = x^3 + 3 - 4x$ y $Q(x) = 5x^2 - x$.

Ubicamos el primer polinomio de forma completa y ordenada, y debajo el segundo polinomio, de forma ordenada:

1°) Multiplicamos el término de menor grado de Q(x) por cada término del polinomio P(x), y ubicamos debajo los resultados de cada multiplicación.

2°) Luego multiplicamos el término siguiente de Q(x) por cada término del polinomio P(x), y ubicamos debajo de los resultados obtenidos en el punto anterior, encolumnando los términos semejantes.

3°) Sumamos los términos semejantes y obtenemos así el resultado de la multiplicación.

$$\begin{array}{lcr} P(x) & & x^3+0x^2-4x+3 \\ & \text{x} & \\ Q(x) & & 5x^2-x \\ \hline & & -x^4+0x^3+4x^2+3x \\ + & & \\ & 5x^5+0x^4-20x^3+15x^2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{P(x).Q(x)=\ 5x^5-x^4-20x^3+19x^2+3x}$$

Observa atentamente los videos explicativos:

Multiplicación de monomios: https://www.youtube.com/watch?v=epsasFCsJ9A

Multiplicación de polinomios: https://www.youtube.com/watch?v=bBjYPkwZFJc (Aclaración: en el video en vez de completar los polinomios, dejan los espacios vacíos. Ustedes deberán completarlos, ya que eso facilita la resolución, para no olvidar luego dejar esos espacios).

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

Comencemos viendo *cómo dividir DOS MONOMIOS:*

Para dividir dos monomios, se deben dividir los coeficientes y las variables entre sí, aplicando la regla de los signos y la propiedad del cociente de potencias de igual base ($x^a : x^b = x^{a-b}$)

Importante: El grado del monomio dividendo debe ser mayor o igual al grado del monomio divisor, para poder efectuar la división (de lo contrario el grado del cociente sería negativo, y por lo tanto dejaría de ser una expresión algebraica entera)

EJEMPLO

Para dividir $10x^4$ por $5x^2$, dividimos los coeficientes y restamos los grados de los monomios:

$$(\mathbf{10x^4}):(\mathbf{5x^2}) = (\mathbf{10}:\mathbf{5}).\mathbf{x^{4-2}} = \mathbf{5x^2}$$

Para dividir $-10x^8$ por $3x$, hacemos:

$$(\mathbf{-10x^8}):(\mathbf{3x}) = (\mathbf{-10}:\mathbf{3}).\mathbf{x^{8-1}} = -\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\mathbf{x^7}$$

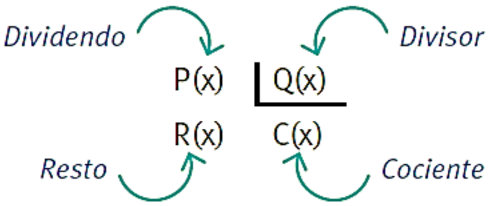
Observa el video "**División de monomios**": https://www.youtube.com/watch?v=Dprx-1Vk8gY

Teniendo en cuenta esto, ya estamos en condiciones de ver ***cómo dividir un POLINOMIO por un MONOMIO:***

Para dividir un polinomio por un monomio, se debe dividir cada término del polinomio por el monomio, aplicando la regla de los signos y la propiedad del cociente de potencias de igual base, <u>hasta que el grado del dividendo sea menor que el grado del divisor</u>

Importante: Aquí también debemos tener en cuenta que **<u>el grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual al grado del monomio divisor, para poder efectuar la división</u>**. Si el polinomio tiene términos de grado menor que el monomio, se termina la división, y dichos términos serán el resto.

Para efectuar la división, utilizamos el mismo algoritmo empleado para la **división entera**:



Para comprobar que la división está bien hecha, miramos si se cumple la **propiedad fundamental de la división**:

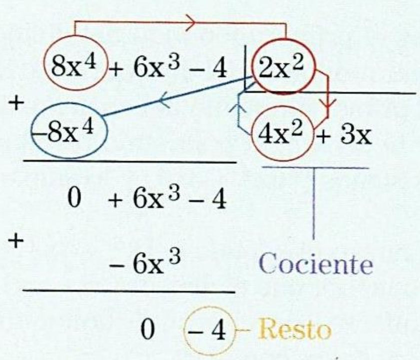
Dividendo = divisor x cociente + resto

Analicemos en detalles los pasos que se siguen en el algoritmo de la división entera de un polinomio por un monomio.

Recuerda siempre ordenar el polinomio de forma decreciente antes de comenzar la división.

EJEMPLO

.: Vamos a hallar el cociente y el resto de la división entre $P(x) = 8x^4 + 6x^3 - 4$ y $Q(x) = 2x^2$



• Dividimos el primer monomio del dividendo ($8x^4$) por el monomio divisor ($2x^2$). El resultado ($4x^2$) es el primer monomio del cociente. Lo multiplicamos por el divisor y obtenemos $8x^4$. Le cambiamos el signo ($-8x^4$) y lo sumamos al dividendo.

• Como el nuevo dividendo ($6x^3 + 0x^2 + 0x - 4$) no es de grado menor que el divisor ($2x^2$), repetimos el procedimiento con el primer monomio del nuevo dividendo, es decir, con $6x^3$.

• Obtuvimos un nuevo dividendo (-4), que es de grado menor que el divisor. Entonces ése es el resto, y ahí termina la división.

Por lo tanto, el cociente de la división es $\boxed{C(x) = 4x^2 + 3x}$, y el resto es $\boxed{R(x) = -4}$.

Para comprenderlo mejor, mira el siguiente video:

División de un polinomio por un monomio: https://www.youtube.com/watch?v=FE-ZyzI54yU

Para verificar que la división esté bien resuelta, se debe cumplir la propiedad fundamental de la división:

$$\boldsymbol{P(x) = Q(x).C(x) + R(x)}$$

Es decir, que al multiplicar el monomio dividendo por el polinomio cociente, y sumarle el resto, obtenemos el polinomio divisor.

Veamos si se cumple:

Primero resolvemos $\boldsymbol{Q(x).C(x)}$**:**

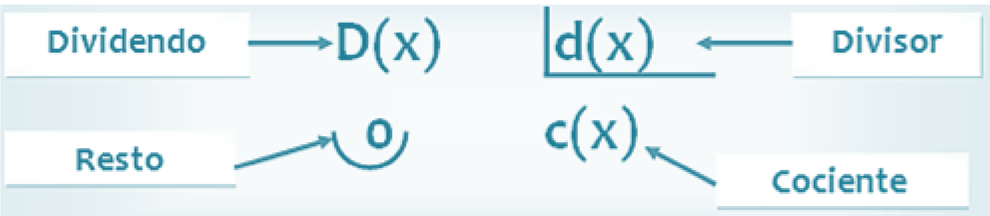
$$\begin{array}{lr}
C(x) & 4x^2 + 3x \\
\quad \text{x} & \\
Q(x) & 2x^2 \\
\hline
\boldsymbol{Q(x).C(x)} = & 8x^4 + 6x^3
\end{array}$$

Luego sumamos el resto a este resultado, para eso completamos el polinomio:

$$\begin{array}{lr}
Q(x).C(x) & 8x^4 + 6x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\
\quad + & \\
R(x) & -4 \\
\hline
\boldsymbol{Q(x).C(x) + R(x)} = & 8x^4 + 6x^3 + 0x^2 + 0x - 4
\end{array}$$

Por lo tanto, **se verifica que** $\boldsymbol{P(x) = Q(x).C(x) + R(x) = 8x^4 + 6x^3 - 4}$, lo que significa que la división está bien resuelta.

Si al efectuar la división, **el resto es cero**, se dice que **la división es exacta:**



Por lo tanto, se cumple que:

$$\boldsymbol{D(x) = d(x).c(x)}$$

Ya que en la propiedad fundamental de la división, al ser cero el resto, ese término se elimina.

De este modo se obtiene que el dividendo D(x) es múltiplo del divisor d(x) y del cociente c(x). También se dice que d(x) y c(x) son divisores del polinomio D(x).

Veamos un ejemplo:

$D(x) = 4x^3 - 6x^2$ $\qquad\qquad$ $d(x) = 2x$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 4x^3 - 6x^2 & 2x \\ \hline
 & -4x^3 & 2x^2 - 3x \\ \hline
 & 0 \; - 6x^2 & \\
 & +6x^2 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

➔ Cociente: $c(x) = 2x^2 - 3x$

0 ➔ Resto cero

Ahora verifiquemos que se cumpla que $\boldsymbol{D(x) = d(x).c(x)}$

$$
\begin{array}{lr}
c(x) & 2x^2 - 3x \\
\quad \text{x} & \\
d(x) & 2x \\ \hline
\boxed{\boldsymbol{c(x).d(x)} = \quad 4x^3 - 6x} &
\end{array}
$$

Como se verifica que $\boldsymbol{D(x) = d(x).c(x)} = 4x^3 - 6x$, entonces, la división está bien resuelta.

Actividades

1) <u>Construcción:</u> En la cada se Joaquín se quieren hacer varias remodelaciones, el costo para cada una de ellas está representado por una expresión algebraica, dado que cada variable (z, y, z, w) representa un tipo de cambio diferente en moneda.

Carpintería (C): $-10x + 2y - 4z + w$

Pintura (P): $5x - 10y + 2z - 5w$

Jardinería (J): $-x - 10y + 2z + 3w$

Albañilería (A): $5x - 10y + 2z$

Teniendo en cuenta las expresiones de los costos, calcula lo solicitado:

a) ¿Cuál es la expresión resultante de costos?

$$\mathrm{C + P + J + A =}$$

b) El costo de albañilería se duplicó, por lo que el proyecto de carpintería se cancela. Determine la nueva expresión resultante de costos:

$$\mathrm{P + 2.J + A =}$$

c) Si consideramos que $\mathrm{x} = -15; \mathrm{y} = -1; \mathrm{z} = 1$ y $\mathrm{w} = 8$, ¿Cuál es el valor de todo el proyecto de remodelación?

2) Completa para hallar el cociente y el resto de la división entre $F(x) = -6x^4 + 9x^5 - 12 + 3x^2$ y $G(x) = -3x$

Escribimos el polinomio dividendo ordenado para facilitar la lectura.

- $F(x)$ ordenado: $F(x) =$ ....
- Hacemos la división:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 9x^5 - 6x^4 + 3x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\cline{3-3}
+ & \ldots\ldots & \ldots\ldots + 2x^3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\cline{2-2}
 & 0 \ \ - 6x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
+ & 6x^4 & \\
\cline{2-2}
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & \ldots\ldots & \\
\cline{2-2}
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\end{array}
$$

3) Teniendo en cuenta los polinomios dados, resuelve las operaciones:

$P(x) = 3x$ $\qquad Q(x) = 9x - 6x^3$ $\qquad R(x) = -\frac{1}{2}x^3$ $\qquad S(x) = x^6 - 3x^2 + 15 - 8x^5$

a) $P(x).R(x) =$

c) $S(x).Q(x) =$

d) $Q(x): P(x) =$