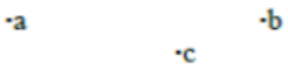
RESUMEN

Geometría

La **geometría** como palabra tiene dos raíces griegas: geo = tierra y metrón = medida; o sea, significa "medida de la tierra". Su origen, unos tres mil años antes de Cristo, se remonta al Medio Oriente, en particular al Antiguo Egipto, en que se necesitaba medir predios agrarios para cobrar impuestos o la demarcación de tierras luego de las inundaciones del Río Nilo, en la construcción de pirámides y monumentos. Esta concepción geométrica se aceptaba sin demostración, era producto de la práctica (equivalentes a recetas). Estos conocimientos pasaron a los griegos y fue Thales de Mileto quien hace unos 6 siglos antes de Cristo inició la geometría demostrativa. Las propiedades se demuestran por medio de razonamientos y no porque resulten en la práctica. Aunque no con tanta rigurosidad como luego sí lo fue a partir de la escuela pitagórica. Las demostraciones pasan a ser fundamentales y son la base de la Lógica como leyes del razonamiento. Los griegos, y entre ellos Euclides la construyeron observando directamente los cuerpos de la naturaleza. De ellos extrajeron los conceptos de punto, recta y plano, que forman la base de esta ciencia. Cualquier figura geométrica es un conjunto de puntos, rectas y planos, de modo que se les pueden aplicar todas las ideas que sobre conjuntos conocemos. Estos tres conceptos sobre los cuales construimos la geometría, como todo concepto primario, no admiten una definición; por lo tanto, tenemos que recurrir a la intuición. Estos conceptos intuitivos e indefinibles reciben el nombre de primeros principios, axiomas o postulados.

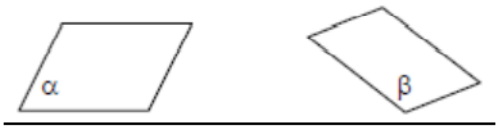
Concepción intuitiva de punto, recta y plano

PUNTO: No se puede definir. La huella que deja un lápiz bien afilado sobre una hoja de papel nos sugiere la idea de un punto. Un punto carece de dimensiones, es sólo una posición en el espacio. Se representa utilizando letras minúsculas, por ejemplo:



RECTA: Una idea vaga de recta se tiene por la observación del borde de una regla, un hilo en tensión, etc. La recta se extiende sin límite en dos sentidos opuestos. Se denotan las rectas utilizando letras mayúsculas de imprenta:

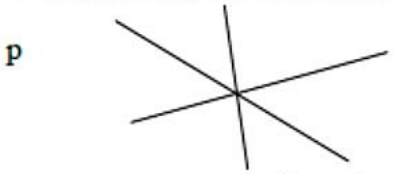
PLANO: Una idea de plano nos la sugiere la superficie de un tablero, el piso, etc. Un plano tiene dos dimensiones, largo y ancho. Un plano tiene una extensión ilimitada. Un plano se considera constituido por un conjunto infinito de puntos. Se denota el plano utilizando letras griegas:



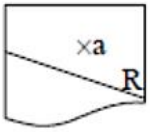
AXIOMAS CARACTERÍSTICOS

- Postulado1: "Existen infinitos puntos".
- Postulado2: "Dos puntos determinan una recta".

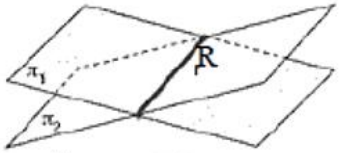
- Postulado3: "Por un punto pasan infinitas rectas".



- Postulado 4: "Una recta y un punto fuera de ella determinan un plano".



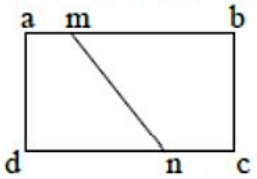
- Postulado 5: "Por una recta pasan infinitos planos".



Planos secantes

Dos planos se cortan en una línea recta, recta de intersección.

Postulado 6: " La recta determinada por dos puntos de un plano pertenece a dicho plano".



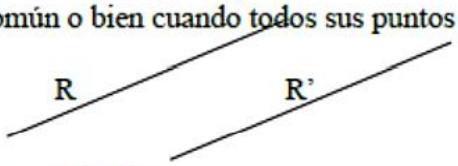
DEFINICIONES

SEMIPLANO: toda recta mn de un plano lo divide en dos regiones llamadas semiplanos. Cada punto del plano pertenece a uno de los semiplanos, excepto los puntos de la recta mn que pertenecen a los dos.

Un conjunto de puntos se dicen coplanares si se encuentran todos en un mismo plano.

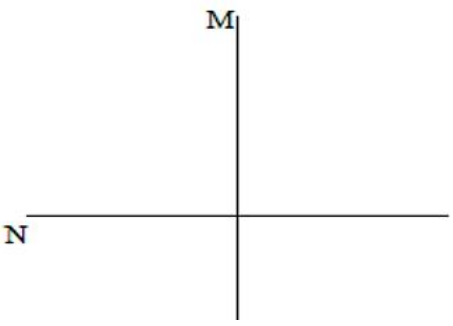
Definición de rectas paralelas.

Así, dos rectas, contenidas en un plano, son paralelas cuando no se cortan, es decir que no tienen ningún punto en común o bien cuando todos sus puntos coinciden.



Definición de rectas perpendiculares

Dos rectas perpendiculares son aquellas que al cortarse, forman cuatro ángulos rectos.

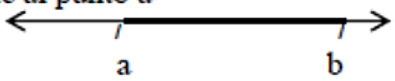


$M \perp N$

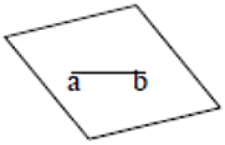
SEMIRRECTA: si señalamos un punto "a" en una recta, dicho punto junto con los puntos que le siguen o le preceden en el mismo sentido se denomina semirrecta; A se conoce como el origen de la semirrecta. Para denotar una semirrecta se señala otro punto además del origen, y se utiliza el siguiente símbolo:

$\overrightarrow{ab}$

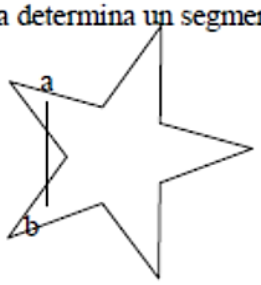
SEGMENTO: si señalamos sobre una recta los puntos a y b, se denomina segmento ab a la intersección de la semirrecta de origen a que contiene al punto b y la semirrecta de origen b que contiene al punto a

$\overline{ab}$ 

Una figura es convexa si cada vez que tomamos dos puntos en ella, el segmento que los une pertenece también a dicha figura.

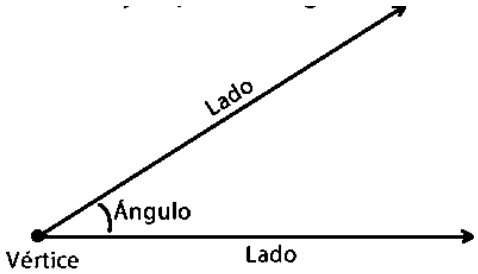


Una figura es cóncava si al menos un par de puntos de la figura determina un segmento no incluido en ella



Una figura es *convexa* si cada vez que tomamos dos puntos en ella, el segmento que los une pertenece también a dicha figura.

ÁNGULO: Es la porción del plano determinada por dos semirrectas con origen en común.

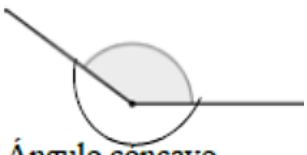


Bisectriz de un ángulo: La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que divide el ángulo en dos partes iguales, cuyo origen es el vértice del ángulo.

Clasificación de ángulos

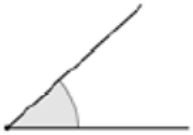
Clasificación de ángulos según su medida

Ángulo convexo



Nulo = 0°

Agudo < 90°



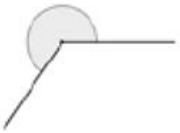
Recto = 90°

Ángulo cóncavo

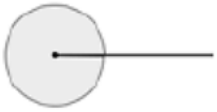
Obtuso>90°

Llano = 180°

Cóncavo > 180°

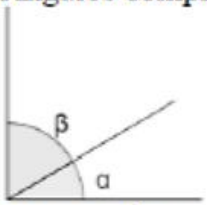


Completo = 360°



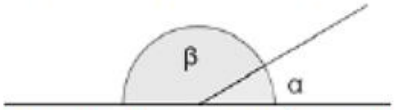
CLASES DE ÁNGULOS SEGÚN SU SUMA

Ángulos complementarios



Dos ángulos son complementarios si suman 90°.

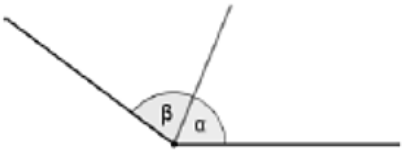
Ángulos suplementarios



Dos ángulos son suplementarios si suman 180°.

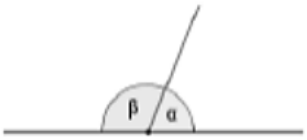
CLASES DE ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN

Ángulos consecutivos



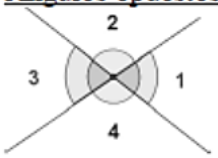
Ángulos consecutivos son aquellos que tienen el vértice y un lado común.

Ángulos adyacentes



Ángulos adyacentes son aquellos que tienen el vértice y un lado común, y los otros lados situados uno en polongación del otro. Forman un ángulo llano.

Ángulos opuestos por el vértice



Son los que teniendo el vértice común, los lados de uno son prolongación de los lados del otro.
Los ángulos 1 y 3 son iguales.
Los ángulos 2 y 4 son iguales.

- **Cómo convertir grados, minutos y segundos a grados:** https://youtu.be/_B_oP2jPVcY?list=PLWRbPOo5oaTf2whhnJl7pa024DgsoHD74
- **Cómo convertir un ángulo a grados, minutos y segundos:** https://youtu.be/UEVszfvZeA4?list=PLWRbPOo5oaTf2whhnJl7pa024DgsoHD74
- **Suma y resta en el sistema sexagesimal:** https://youtu.be/xVISJp8p5i4?list=PLWRbPOo5oaTf2whhnJl7pa024DgsoHD74
- **Multiplicación y división en el sistema sexagesimal:** https://youtu.be/RME1Y5FmpVo?list=PLWRbPOo5oaTf2whhnJl7pa024DgsoHD74

RAZONES Y PROPORCIONES

D. RAZONES Y PROPORCIONES

Razón

Una **razón** entre dos cantidades es una comparación por cuociente, es decir:

$$\frac{a}{b} = k$$

a : Antecedente

b : Consecuente

k : Valor de la razón

Ejemplo

Si las edades de Carlos y Francisco son 12 y 15 años, entonces la razón entre sus edades es: $\frac{12}{15}$ si simplificamos por tres obtenemos: $\frac{4}{5}$

Proporción

La igualdad entre dos razones se denomina **proporción**, es decir

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ó } a:b = b:c$$

donde a y d : Extremos

b y c : Medios

Ejemplo

La igualdad entre las razones anteriores: $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ es una proporción, lo que se puede constatar porque los productos cruzados son iguales: $12 \cdot 5 = 4 \cdot 15$

Teorema fundamental de las proporciones

La propiedad: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$ se denomina propiedad fundamental de las proporciones.

El símbolo ⇔ se lee "*sí y solo sí*"

Significa que la primera expresión es cierta solo si es cierta la segunda, y viceversa.

Proporcionalidad numérica: RAZÓN: https://www.youtube.com/watch?v=HB4hX5UkaRA

¿Qué es una razón? : https://youtu.be/UYXAcOv7cwM?t=83

¿Cómo planteamos y resolvemos problemas de proporcionalidad?

Proporcionalidad Directa

Dos variables están en proporcionalidad directa si su cuociente permanece constante:

x e y están en proporcionalidad directa $\Leftrightarrow \frac{x}{y} = k$

k se denomina la constante de proporcionalidad.

Ejemplo

Un vehículo tiene en carretera un rendimiento de 16 km/l, ¿cuántos litros de nafta consumirá en un viaje de 192 km?

Planteo

16 km --------→ 1 l

192 km-------→ **x** l

Escribo la proporción

$$\frac{16km}{192km} = \frac{1l}{x\,l}$$

Aplico la propiedad fundamental de las proporciones

16.x= 192.1

Despejo y hallo el valor de x

$$X = \frac{192.1}{16}$$

X= 12 litros

En un viaje de 192 km se consumen 12 litros de combustible

Proporcionalidad Inversa

Dos variables están en proporcionalidad inversa si su producto permanece constante:

x e y están en proporcionalidad inversa $\Leftrightarrow x \cdot y$ = k

k se denomina la constante de proporcionalidad.

Ejemplo

Tres obreros demoran 5 días en hacer una zanja, ¿cuánto demorarán 4 obreros?
Por estar en proporcionalidad inversa el producto entre las variables: número de obreros – tiempo es constante:

Planteo

3 obreros --------→ 5 días

4 obreros-------→ **x** días

INVIERTO LA RAZÓN

Escribo la proporción

$$\frac{3\ ob}{4\ ob} = \frac{x\ días}{5\ días}$$

Aplico la propiedad fundamental de las proporciones

3.5= 4.x

Despejo y hallo el valor de x

$$X = \frac{3.5}{4}$$

$$X = \frac{15}{4} = 3,75\ días$$

Cuatro obreros tardarán 3,75 días (podemos expresarlos en días, horas, minutos y segundos si fuera posible)

La proporcionalidad en la vida cotidiana: https://youtu.be/gkVG5oP0c5k?t=29

Proporcionalidad numérica: proporción: https://www.youtube.com/watch?v=We9410Oceq4

¿Cómo completamos tablas de valores?

Problema 1.

La velocidad de un automóvil es constante igual a 60 km por hora, completar la siguiente tabla.

Distancia/km	60	120	180	240	300
Tiempo/hora	1				

La distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla son directamente proporcionales, pues a mayor espacio recorrido, corresponde mayor tiempo, y a menor espacio recorrido corresponde menor tiempo.

Solución.

Tiempo/hora	1				
Distancia/km	60	120	180	240	300

La primera proporción que se tiene es

$$\frac{1}{60} = \frac{n}{120}$$

$$1 \times 120 = 60 \times n$$

$$120 = 60 \times n$$

$$n = \frac{120}{60}$$

$$n = 2$$ ← Es el valor que va arriba de 120

La segunda proporción que se tiene es

$$\frac{1}{60} = \frac{n}{180}$$

$$1 \times 180 = 60 \times n$$

$$180 = 60 \times n$$

$$n = \frac{180}{60}$$

$$n = 3$$ ← Es el valor que va arriba de 180

IMPORTANTE:

Este es un ejemplo de completar tablas de una proporción directa.

En el caso de ser INVERSA recuerda **invertir la segunda razón** (la que tiene la incógnita) y luego aplicar la propiedad fundamental.

La tercera proporción que se tiene es

$$\frac{1}{60} = \frac{n}{240}$$

$$1 \times 240 = 60 \times n$$

$$240 = 60 \times n$$

$$n = \frac{240}{60}$$

$$n = 4$$ ← Es el valor que va arriba de 240

La cuarta proporción que se tiene es

$$\frac{1}{60} = \frac{n}{300}$$

$$1 \times 300 = 60 \times n$$

$$300 = 60 \times n$$

$$n = \frac{300}{60}$$

$$n = 5$$ ← Es el valor que va arriba de 300

TABLA COMPLETA EN BASE A LOS CÁLCULOS ANTERIORES

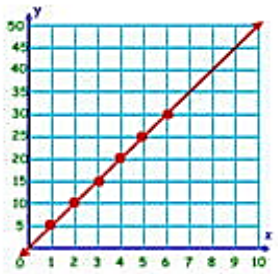
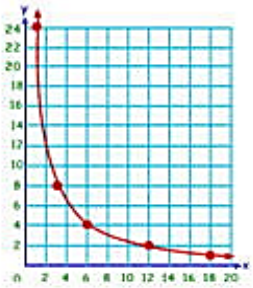
Solución.

Tiempo/hora	1	2	3	4	5
Distancia/km	60	120	180	240	300

Tablas de proporcionalidad: https://youtu.be/4f0z-1IMoNE?t=30

¿Cómo representamos gráficamente con tablas de valores?

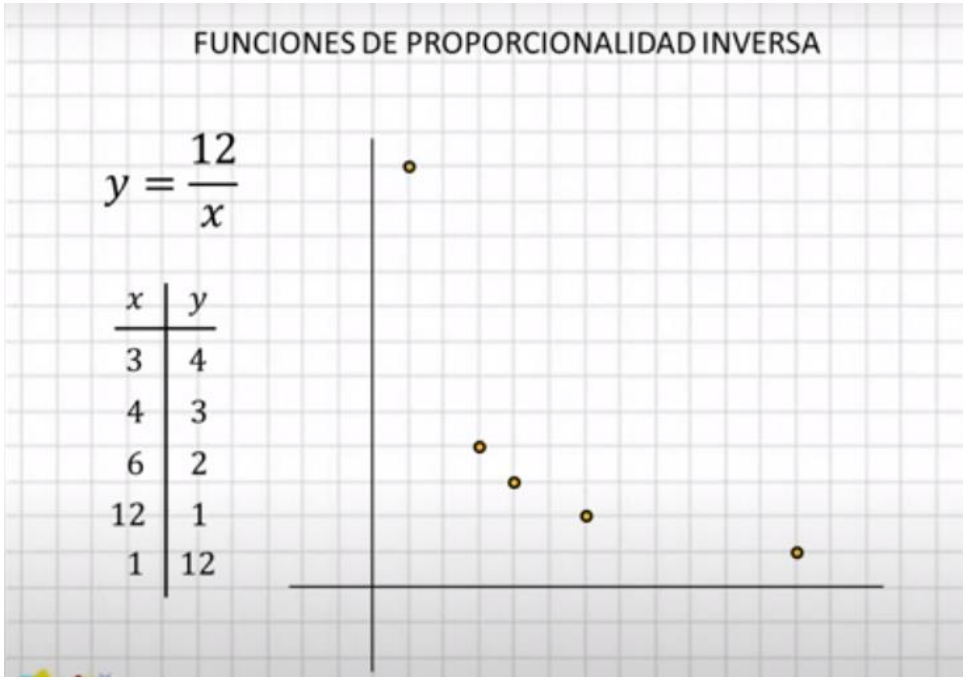
FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Función de Proporcionalidad Directa	Función de Proporcionalidad Inversa
Al aumentar o disminuir una de las variables, la otra aumenta o disminuye, respectivamente, en la misma razón. **"A más... más y a menos... menos"**	En una función de proporcionalidad inversa, si una de las variables aumenta, la otra disminuye en un mismo factor; y si una de las variables disminuye, la otra aumenta en un mismo factor. **"A más... menos y a menos... más"**
La gráfica es una **línea recta** que pasa por el origen de coordenadas. 	La gráfica es una curva llamada **hipérbola**. 
Función de la forma: $y = k \cdot x$	Función de la forma: $y = \frac{k}{x}$
Constante de proporcionalidad: $k = \frac{y}{x}$	Constante de proporcionalidad: $K = x \cdot y$

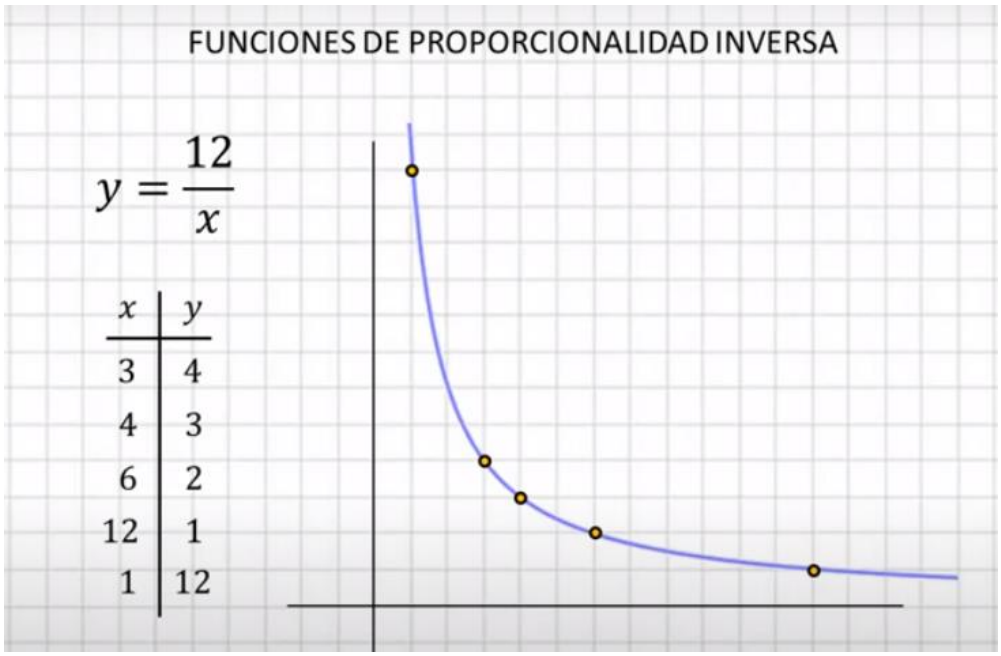
Recuerda que para realizar las representaciones gráficas de la función de proporcionalidad armamos tablas de valores, luego trazamos los puntos en un sistema de ejes cartesianos y finalmente los unimos, de acuerdo a lo que observes podrás decir si se trata de una función de proporcionalidad directa o inversa

Grafica de una función de proporcionalidad directa (Hasta tiempo 3:16)**:**
https://youtu.be/nP9SwAqhVTI

De la misma forma si tenemos una función de proporcionalidad inversa y armamos una tabla de valores con el siguiente ejemplo:



Trazando la curva que une los puntos obtenemos la gráfica de la función que es una hipérbola equilátera



Diversos tipos de variación: https://youtu.be/MER5prjQVCo?t=32

Escala

La escala es la relación de proporción entre las dimensiones reales de un objeto y las del dibujo (plano, mapa) que lo representa. Se escriben en forma de razón donde el **antecedente** indica el valor del plano y el **consecuente** el valor de la realidad. Tanto el antecedente como el consecuente deben estar **expresados en la misma unidad de medida**.

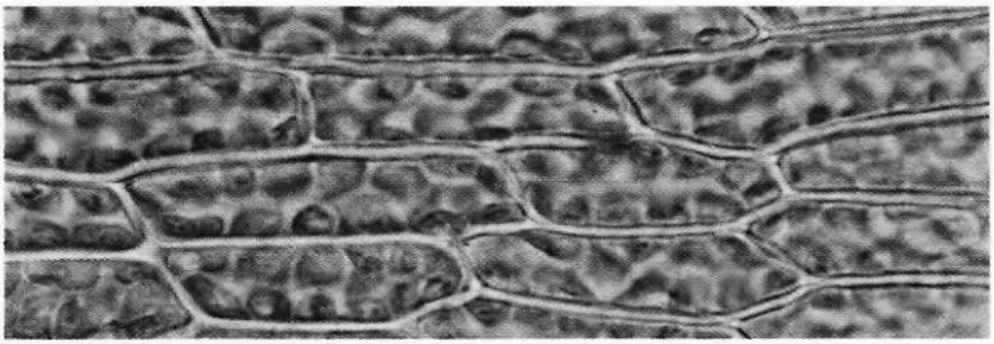
$$Escala = \frac{Dibujo}{Realidad} \quad \text{o bien} \quad Escala = Dibujo : Realidad$$

Por ejemplo, si, en un plano en detalle de un baño, una bañadera de 1,50 m de largo se dibuja de 7,5 cm de largo, la escala utilizada es $\frac{7{,}50\text{ cm}}{150\text{ cm}} = \frac{1}{20}$. Esta escala se expresa, habitualmente, como 1 : 20 y se lee *uno en veinte*.

Decir que un mapa está dibujado con una escala de 1:5000 significa que cada unidad dibujada equivale a 5000 unidades en la realidad. Por ejemplo 1cm en el mapa representa 5000 cm (50 m) en la realidad, 1m en el mapa representa 5000 m en la realidad, etc.

Para calcular la distancia D entre dos puntos, conociendo la distancia d *entre la representación de esos puntos en un dibujo de escala* a : b, *basta con calcular D en la proporción* $\frac{a}{b} = \frac{d}{D}$. *Si la escala es 1 : b, resulta* $D = d \cdot b$, *expresada en la unidad que se usó para determinar* d.

También se usan escalas que amplían las longitudes, como cuando se indica el aumento de una fotografía tomada con un microscopio.



En la fotografía, puede observarse una imagen de célula vegetal vista con un microscopio que aumenta 150 veces. Escala: 150 : 1.

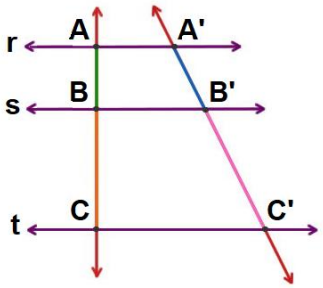
Observa atentamente los videos explicativos:

Escala: https://youtu.be/qzl-c3rbkE8

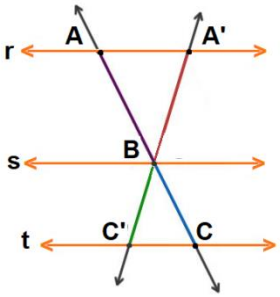
Problemas con escala: https://youtu.be/g0F-7jdbWto

Teorema de Thales (proporcionalidad geométrica)

Tres (o más) rectas paralelas determinan sobre dos (o más) rectas, secantes a ellas, segmentos de longitudes proporcionales



Si $\mathbf{r} // \mathbf{s} // \mathbf{t}$, entonces $\frac{\overline{\mathbf{A'B'}}}{\overline{\mathbf{AB}}} = \frac{\overline{\mathbf{A'C'}}}{\overline{\mathbf{AC}}} = \frac{\overline{\mathbf{B'C'}}}{\overline{\mathbf{BC}}}$



Si $\mathbf{r} // \mathbf{s} // \mathbf{t}$, entonces $\frac{\overline{\mathbf{A'B}}}{\overline{\mathbf{AB}}} = \frac{\overline{\mathbf{A'C'}}}{\overline{\mathbf{AC}}} = \frac{\overline{\mathbf{BC'}}}{\overline{\mathbf{BC}}}$

Este teorema nos permite calcular la longitud de un segmento si conocemos su correspondiente en la otra recta y la proporción entre ambos. Ya que no podemos trabajar a partir de la igualdad las tres razones, dependiendo el segmento que necesitamos calcular y los datos que tenemos, elegiremos con qué razones nos conviene trabajar para armar la proporción:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} \quad \text{Ó} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} \quad \text{Ó} \quad \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

Observa atentamente los videos explicativos:

Teorema de Thales: https://youtu.be/WhrDNe8-TQ0

Ejercicio resuelto por Teorema de Thales: https://youtu.be/NoiOPdYtT1o

Expresiones algebraicas

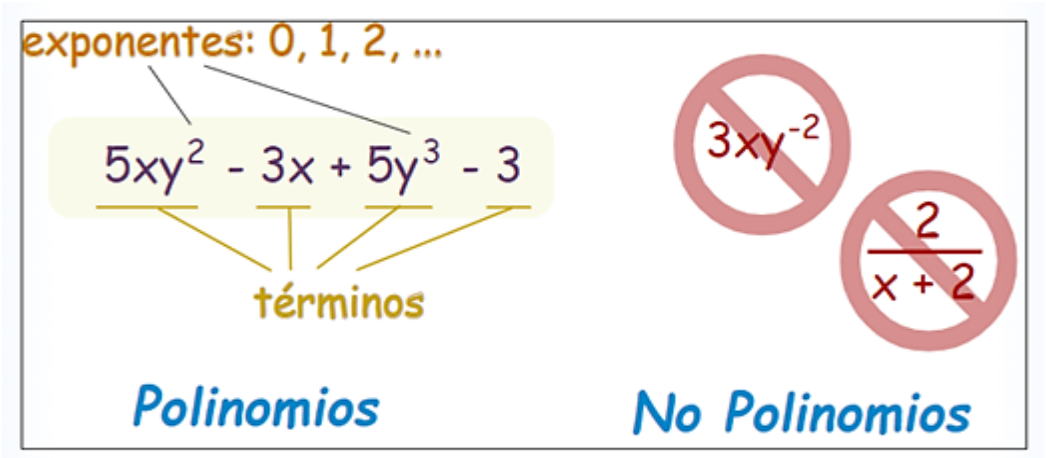
Una **expresión algebraica** es una combinación cualquiera y finita de números, de letras, o de números y letras, ligados entre sí con la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

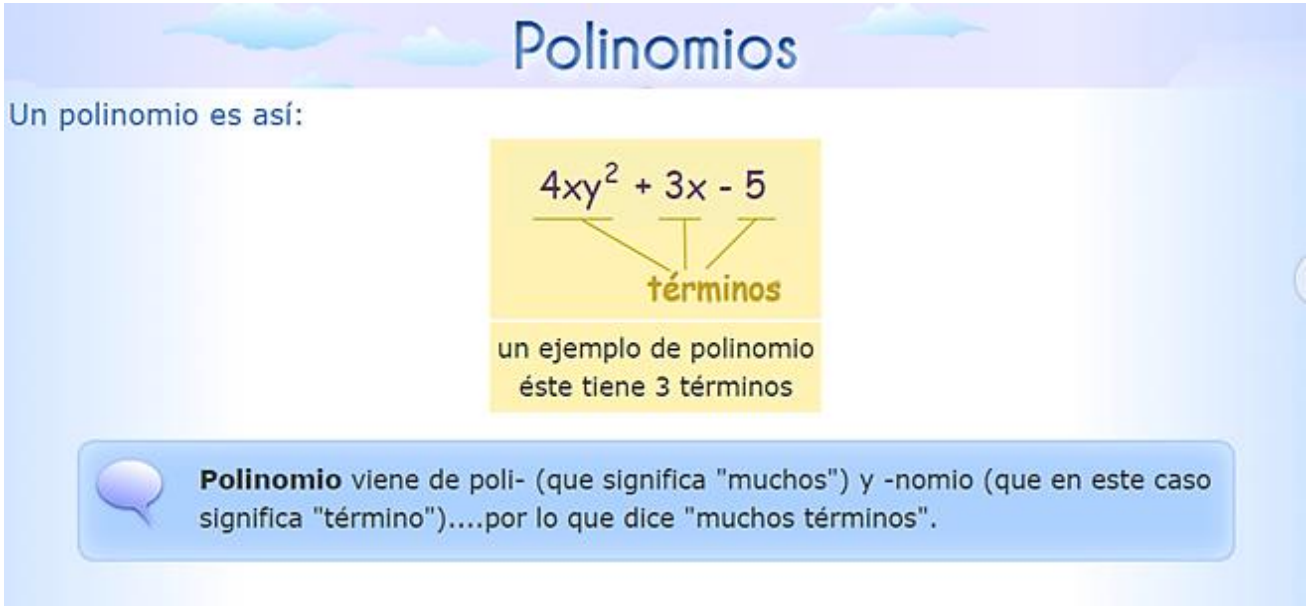
a) $3x + 2^4$ **b)** $4x^5 + 6x^3 - \frac{1}{4}$ **c)** $x^2 + \sqrt{2x}$ **d)** $\frac{x^6 - 10}{x^2}$

Los números son los **coeficientes**, y las letras, las **variables** o **indeterminadas**.

Algunas expresiones algebraicas en particular, con las que se trabajará en esta clase, reciben el nombre de **polinomios** y se caracterizan en que sus variables están afectadas por las operaciones de suma, resta, producto y potencia de exponente entero no negativo. **Es decir que las variables no pueden estar como divisor ni como el radicando en una radicación.**
Si observamos los ejemplos que citamos al comienzo, vemos que solo **a)** y **b)** cumplen con la definición de polinomio.

¿Son polinomios o no?





Cómo saber si es polinomio o no: https://www.youtube.com/watch?v=QFOA95aWEbY

Monomios, binomios, trinomios, cuatrinomios…

Hay nombres especiales para los polinomios con 1, 2, 3 o 4 términos. Algunos ejemplos:

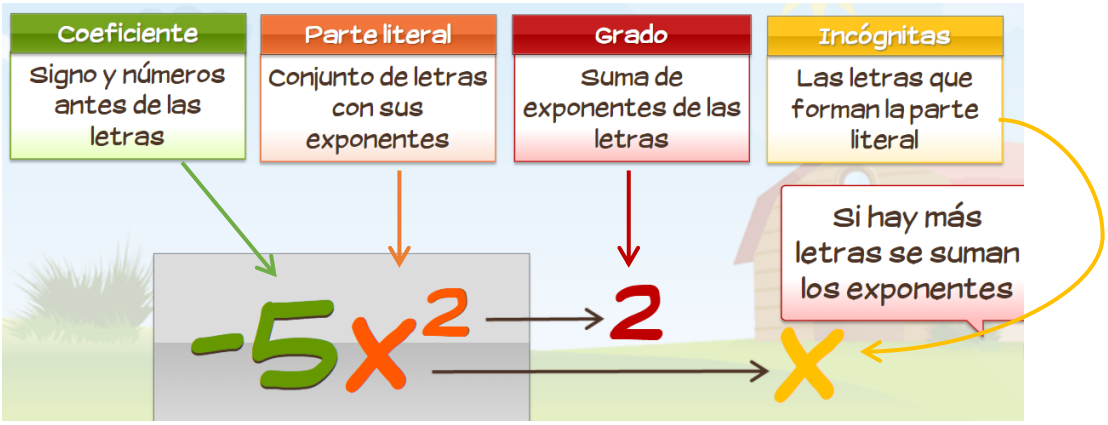
Pensá un ejemplo para cuatrinomio…

A continuación iremos conociendo a los polinomios a partir de definir primero a los monomios, siendo estos su parte fundamental.

Monomios

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por un producto de **números** y **letras**

Elementos de un monomio



Recuerda que si una variable no tiene exponente, entonces su exponente es 1. Por ejemplo:

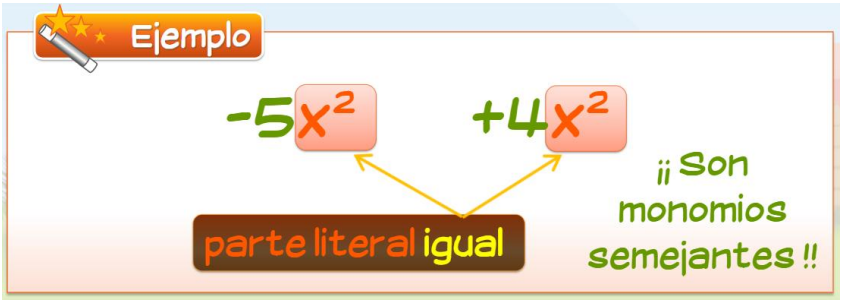
$$2xy^5 = 2x^1y^5$$

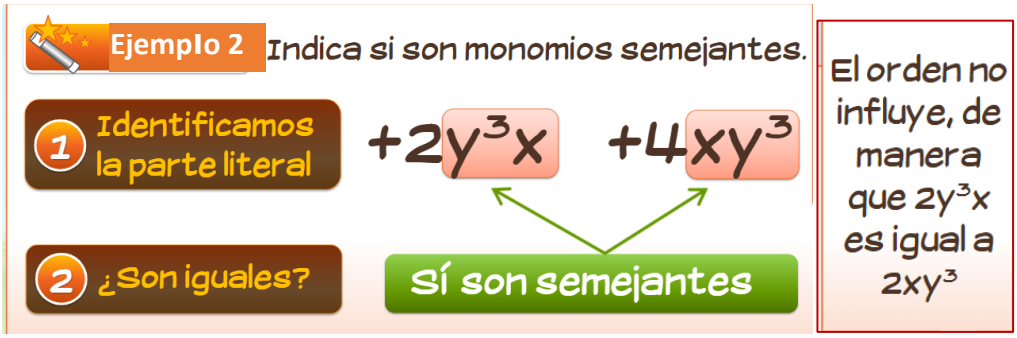
Y cuando no hay coeficiente, dicho coeficiente es 1. Por ejemplo:

$$-x^3 = -1x^3$$

Monomios semejantes

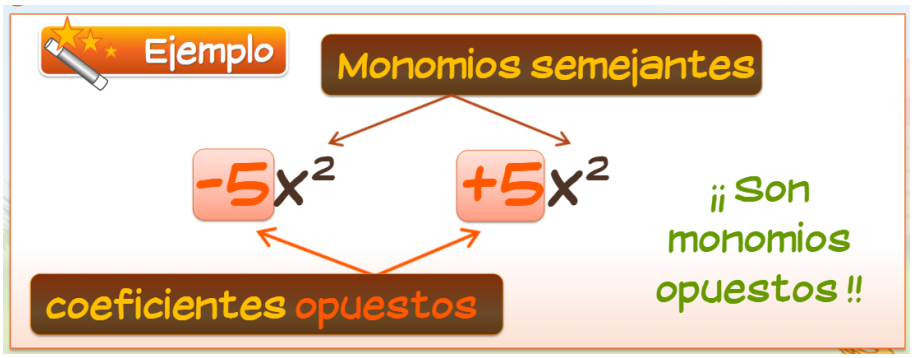
Los **monomios semejantes** son aquellos que tienen la misma **parte literal**



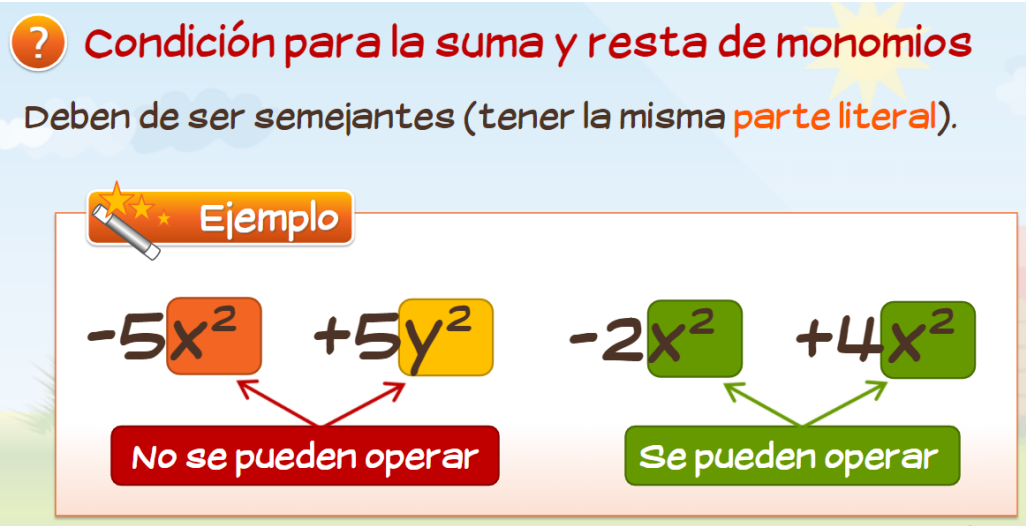


Monomios opuestos

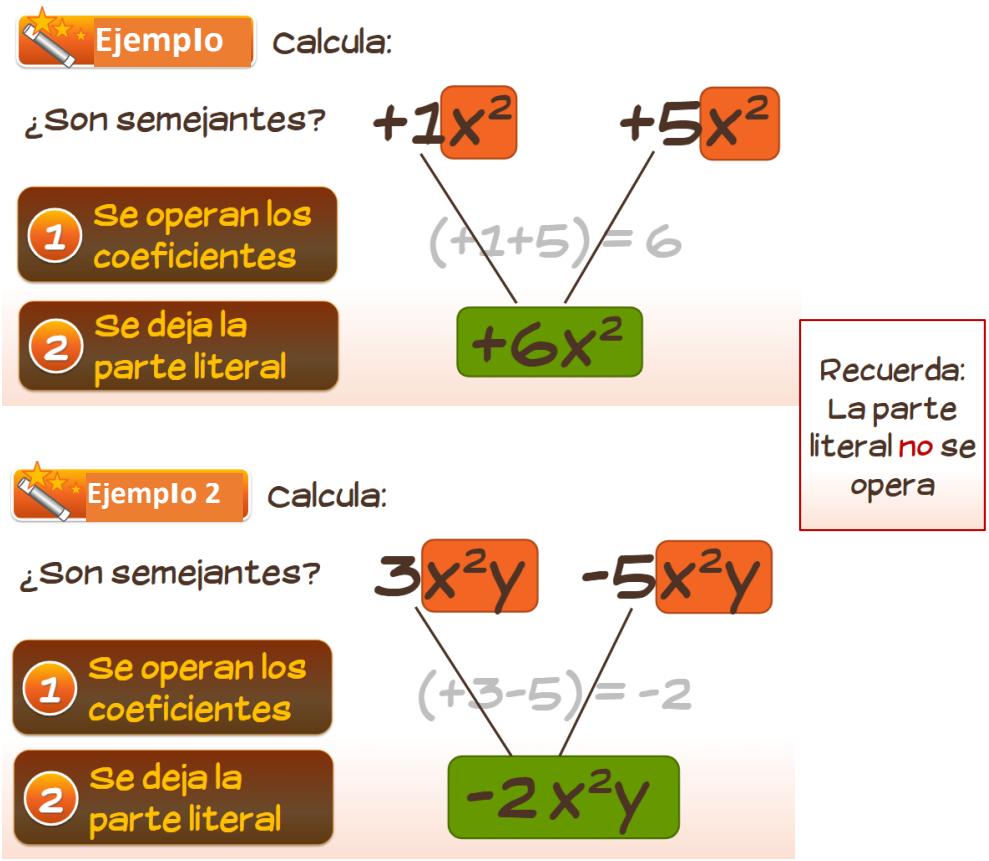
Los **monomios opuestos** son aquellos que son semejantes, de igual coeficiente, pero **distinto signo**.



Suma y resta de monomios



¿Cómo se suman o restan monomios?



Observa atentamente el video **"Suma y resta de monomios":**
https://www.youtube.com/watch?v=N3vD22wJfyw&feature=youtu.be

Polinomios

La suma algebraica de varios monomios se denomina **POLINOMIO**

Ejemplos:

$P(a) = \frac{3}{4}a^2 - 5a + \sqrt[4]{3}$ $\quad$ $R(x) = -x^5 + 22x^7$ $\quad$ $S(x) = \frac{56}{3}x^2 + x^4 - 6x - 456x^8$

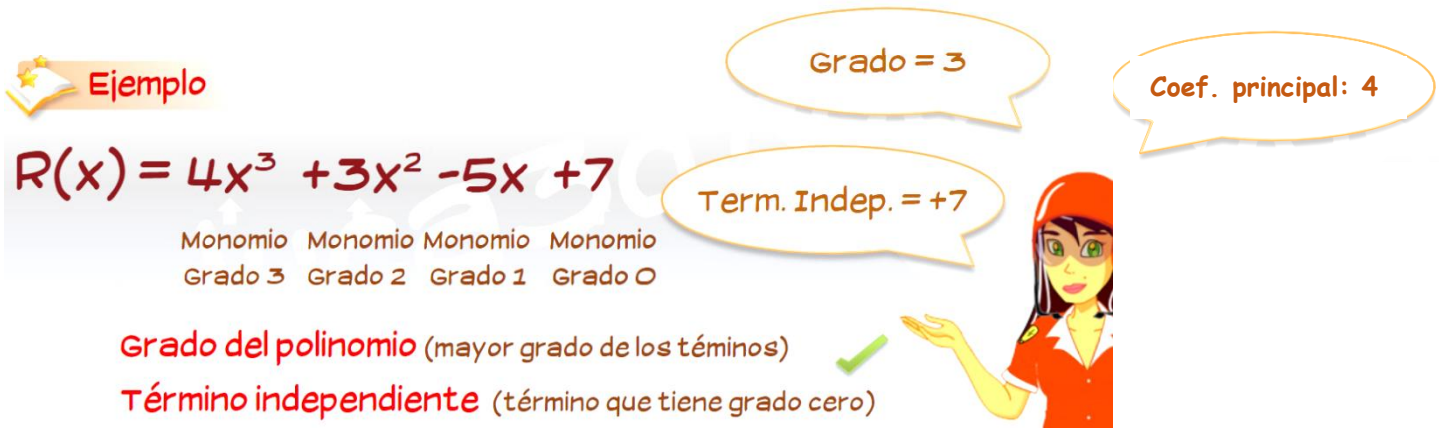
Por lo general, los polinomios se los nombra con letras mayúsculas.

Cada término es un monomio, por lo que posee un **grado**, un **coeficiente** y/o una **parte literal**.

El **grado de un polinomio** es el mayor grado de los términos que lo conforman.

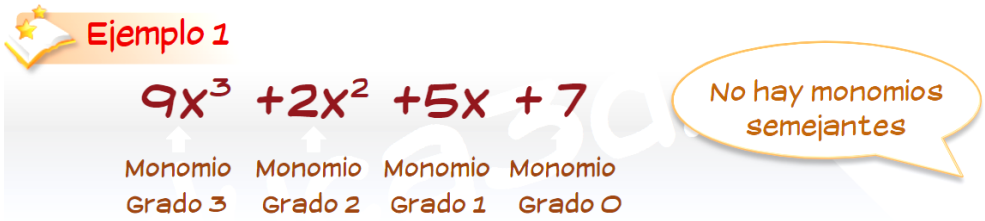
El **coeficiente principal de un polinomio** es el coeficiente del término de mayor grado.

El **término independiente** es aquel cuyo grado es cero (no tiene parte literal).



Polinomios reducidos

Un polinomio está reducido si **no tiene monomios semejantes**



¿Cómo reducimos polinomios?

Reducir un polinomio es sumar o restar sus términos semejantes.

$2x^4 + 3x + x^4 - x = 3x^4 + 2x$ $\quad$ $-4x^3 + x^5 - \frac{2}{3}x^4 + 2x^4 + 6x^3 = x^5 + \frac{4}{3}x^4 + 2x^3$

Polinomios completos y ordenados

Un polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.

$F(x) = 2x^4 + x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}x + 5$ $G(x) = 7 + x + 3x^2 - \frac{3}{2}x^3$ $H(x) = x^5 + 2x^2 - 7$

¿Cómo ordenamos un polinomio?

Ubicamos sus términos en orden creciente o decreciente respecto de los exponentes. Por ejemplo:

$$P(x) = 3x^2 - \frac{4}{3}x^4 - 1 + 7x^5$$

Ordenando sus términos:

$$P(x) = 7x^5 - \frac{4}{3}x^4 + 3x^2 - 1$$

Un polinomio está **completo** si tiene todas las potencias decrecientes del grado.

$R(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 8x + 7$; *está completo.* $Q(x) = x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 9$; *está incompleto.*

¿Cómo completamos un polinomio?

Para completar un polinomio, se agregan los términos que faltan con coeficiente cero.

$M(x) = 2x^5 + x^3 - 8 = 2x^5 + 0x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x - 8$

$N(x) = 8x^4 + 3x^2 = 8x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 0$

$0(x) = x^5 - 9 = x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 9$

Valor numérico de un polinomio

Dado un polinomio *P(x)*, al sustituir la variable x por un número ***a*** se obtiene un número que se denota *P(a)* y que es el valor numérico de *P(x)* para *x = a*.

Ejemplo:

Encontrar el valor numérico del polinomio $P(x) = x^2 + 3x - 4$ para x= 2

$$P(2) = 2^2 + 3.2 - 4 = 6$$

Se dice que a es raíz del polinomio P(x) si y sólo si P(a) = 0.

Observa los siguientes videos:

Polinomios: https://www.youtube.com/watch?v=BDK-k4yc9bE

En este video encontrarás las explicaciones en los minutos que aquí se especifican:

00:00 Definición de expresión algebraica. *02:05 Definición polinomio.*

03:09 Clasificación. *04:09 Polinomio completo y ordenado.*

06:05 Grado, coeficiente principal y término independiente.

08:41 Valor numérico del polinomio. *10:11 Resumen.*

Valor numérico de un polinomio: https://www.youtube.com/watch?v=OEV_F_YC6bY

Suma y resta de polinomios

Para sumar varios polinomios entre sí, se completan y ordenan, luego se encolumnan sus términos semejantes y se suman.

Dados: $\begin{cases} P(x) = -3 + 2x^2 + 5x^3 - x^4 \\ Q(x) = -9x^3 + 2x^2 - 4x + 5 \end{cases}$

$P(x) + Q(x)$

$$\begin{array}{rl} & -x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 0x - 3 \\ + & +0x^4 - 9x^3 + 2x^2 - 4x + 5 \\ \hline P(x) + Q(x) = & -x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2 \end{array}$$

Dados: $\begin{cases} R(x) = 3x^2 + 2x - 1 \\ T(x) = -x + 5 - 4x^2 \end{cases}$

$R(x) + T(x)$

$$\begin{array}{rl} & 3x^2 + 2x - 1 \\ + & -4x^2 - x + 5 \\ \hline R(x) + T(x) = & -x^2 + x + 4 \end{array}$$

Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Dados: $\begin{cases} M(x) = 2x^2 - x + 2 \\ N(x) = 3x^2 - 1 \end{cases}$

$M(x) - N(x)$

$$\begin{array}{rl} & 2x^2 - x + 2 \\ + & -3x^2 + 0x + 1 \\ \hline M(x) - N(x) = & -x^2 - x + 3 \end{array}$$

Dados: $\begin{cases} A(x) = 3x - 2x^2 - \frac{1}{5}x^3 + 6 \\ B(x) = -3x^2 + 5x + 4x^4 + 3 \end{cases}$

$A(x) - B(x)$

$$\begin{array}{rl} & 0x^4 - \frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 3x + 6 \\ + & -4x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 5x - 3 \\ \hline A(x) - B(x) = & -4x^4 - \frac{1}{5}x^3 + x^2 - 2x + 3 \end{array}$$

Para resolver una suma algebraica de polinomios, se opera en el orden en que aparecen los términos.

Dados $P(x) = 5x^2 + 3x - 2$; $Q(x) = -6x^2 - 4x + 5$ y $R(x) = 3x^2 + x - 7$

$P(x) + Q(x) + R(x)$

$$\begin{array}{rl} & 5x^2 + 3x - 2 \\ + & -6x^2 - 4x + 5 \\ & 3x^2 + x - 7 \\ \hline P(x) + Q(x) + R(x) = & 2x^2 + 0x - 4 \end{array}$$

$P(x) + Q(x) - R(x)$

$$\begin{array}{rl} & 5x^2 + 3x - 2 \\ + & -6x^2 - 4x + 5 \\ & -3x^2 - x + 7 \\ \hline P(x) + Q(x) - R(x) = & -4x^4 - 2x + 10 \end{array}$$

Observa atentamente los videos explicativos:

Suma de polinomios: https://www.youtube.com/watch?v=0IxdI-hbGoQ&feature=youtu.be

Resta de polinomios:
https://www.youtube.com/watch?v=GvuuwGbRqXA&feature=youtu.be

Multiplicación de Polinomios

¿Cómo multiplicar DOS MONOMIOS?

La **multiplicación** de dos o más **monomios** es otro monomio en el que

- El coeficiente es el producto de los coeficientes de los factores.
- Las variables son el producto de las variables de los factores, aplicando la propiedad para el producto de potencias de igual base: $x^a x^b = x^{a+b}$.
- El grado es igual a la suma de los grados de los monomios factores.

Por ejemplo, si queremos multiplicar $-4x^3$ y $7x^4$, multiplicamos los coeficientes y sumamos los grados:

$$-4x^3 \,.\, 7x^4 = -4.7.x^{3+4} = -28x^7$$

¿Cómo multiplicar un MONOMIO por un POLINOMIO?

Para **multiplicar un monomio por un polinomio**, multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

EJEMPLO

Multiplica el polinomio $P(x) = -x^5 + 4x^3 - 5x + 1$ por el monomio $3x^2$.

Resolveremos esta multiplicación de forma vertical, ubicando primero el polinomio y debajo el monomio. Es conveniente ubicar el polinomio de forma ordenada. Multiplicamos el monomio por cada término del polinomio, comenzando desde la derecha (con el término de menor grado):

$$\begin{array}{r} -x^5 + 4x^3 - 5x + 1 \\ \times \quad 3x^2 \\ \hline 3x^2 \cdot P(x) \rightarrow \quad -3x^7 + 12x^5 - 15x^3 + 3x^2 \end{array}$$

¿Cómo multiplicar DOS POLINOMIOS?

Para **multiplicar dos polinomios**, debemos multiplicar cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio, y reducir los términos semejantes.

Multiplica los polinomios $P(x) = x^3 + 3 - 4x$ y $Q(x) = 5x^2 - x$.

Ubicamos el primer polinomio de forma completa y ordenada, y debajo el segundo polinomio, de forma ordenada:

1°) Multiplicamos el término de menor grado de Q(x) por cada término del polinomio P(x), y ubicamos debajo los resultados de cada multiplicación.

2°) Luego multiplicamos el término siguiente de Q(x) por cada término del polinomio P(x), y ubicamos debajo de los resultados obtenidos en el punto anterior, encolumnando los términos semejantes.

3°) Sumamos los términos semejantes y obtenemos así el resultado de la multiplicación.

$$\begin{array}{rr} P(x) & x^3+0x^2-4x+3 \\ & \text{x} \\ Q(x) & 5x^2-x \\ \hline & -x^4+0x^3+4x^2+3x \\ + & \\ & 5x^5+0x^4-20x^3+15x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$P(x).Q(x) = 5x^5-x^4-20x^3+19x^2+3x$$

Observa atentamente los videos explicativos:

Multiplicación de monomios: https://www.youtube.com/watch?v=epsasFCsJ9A

Multiplicación de polinomios: https://www.youtube.com/watch?v=bBjYPkwZFJc (Aclaración: en el video en vez de completar los polinomios, dejan los espacios vacíos. Ustedes deberán completarlos, ya que eso facilita la resolución, para no olvidar luego dejar esos espacios).

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

¿Cómo dividir DOS MONOMIOS?

Para dividir dos monomios, se deben dividir los coeficientes y las variables entre sí, aplicando la regla de los signos y la propiedad del cociente de potencias de igual base ($x^a : x^b = x^{a-b}$)

Importante: **El grado del monomio dividendo debe ser mayor o igual al grado del monomio divisor, para poder efectuar la división** (de lo contrario el grado del cociente sería negativo, y por lo tanto dejaría de ser una expresión algebraica entera)

Para dividir $10x^4$ por $5x^2$, dividimos los coeficientes y restamos los grados de los monomios:

$$(\mathbf{10x^4}) : (\mathbf{5x^2}) = (\mathbf{10} : \mathbf{5}).\, \mathbf{x^{4-2}} = \mathbf{5x^2}$$

Para dividir $-10x^8$ por $3x$, hacemos:

$$(\mathbf{-10x^8}) : (\mathbf{3x}) = (\mathbf{-10} : \mathbf{3}).\, \mathbf{x^{8-1}} = -\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\mathbf{x^7}$$

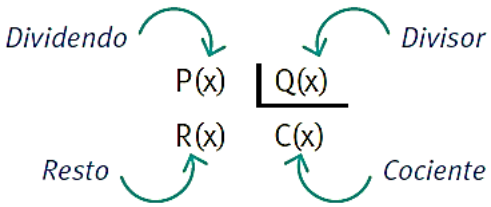
Observa el video "**División de monomios**": https://www.youtube.com/watch?v=Dprx-1Vk8gY

¿Cómo dividir un POLINOMIO por un MONOMIO?

Para dividir un polinomio por un monomio, se debe dividir cada término del polinomio por el monomio, aplicando la regla de los signos y la propiedad del cociente de potencias de igual base, hasta que el grado del dividendo sea menor que el grado del divisor

Importante: Aquí también debemos tener en cuenta que **el grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual al grado del monomio divisor, para poder efectuar la división**. Si el polinomio tiene términos de grado menor que el monomio, se termina la división, y dichos términos serán el resto.

Para efectuar la división, utilizamos el mismo algoritmo empleado para la **división entera**:



Para comprobar que la división está bien hecha, miramos si se cumple la **propiedad fundamental de la división**:

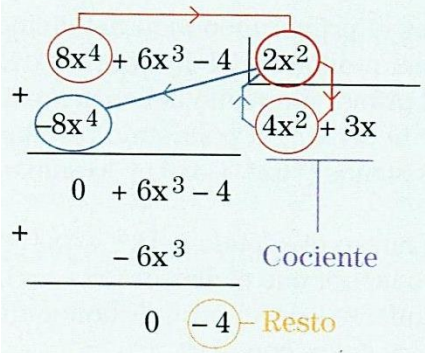
Dividendo = divisor x cociente + resto

Analicemos en detalles los pasos que se siguen en el algoritmo de la división entera de un polinomio por un monomio.

Recuerda siempre ordenar el polinomio de forma decreciente antes de comenzar la división.

EJEMPLO

: Vamos a hallar el cociente y el resto de la división entre $P(x) = 8x^4 + 6x^3 - 4$ y $Q(x) = 2x^2$



- Dividimos el primer monomio del dividendo ($8x^4$) por el monomio divisor ($2x^2$). El resultado ($4x^2$) es el primer monomio del cociente. Lo multiplicamos por el divisor y obtenemos $8x^4$. Le cambiamos el signo ($-8x^4$) y lo sumamos al dividendo.

- Como el nuevo dividendo ($6x^3 + 0x^2 + 0x - 4$) no es de grado menor que el divisor ($2x^2$), repetimos el procedimiento con el primer monomio del nuevo dividendo, es decir, con $6x^3$.

- Obtuvimos un nuevo dividendo (-4), que es de grado menor que el divisor. Entonces ése es el resto, y ahí termina la división.

Por lo tanto, el cociente de la división es $C(x) = 4x^2 + 3x$, y el resto es $R(x) = -4$.

Para comprenderlo mejor, mira el siguiente video:

División de un polinomio por un monomio: https://www.youtube.com/watch?v=FE-ZyzI54yU

Para verificar que la división esté bien resuelta, se debe cumplir la propiedad fundamental de la división:

$$\boldsymbol{P(x) = Q(x).C(x) + R(x)}$$

Es decir, que al multiplicar el monomio dividendo por el polinomio cociente, y sumarle el resto, obtenemos el polinomio divisor.
Veamos si se cumple:
Primero resolvemos $\boldsymbol{Q(x).C(x)}$**:**

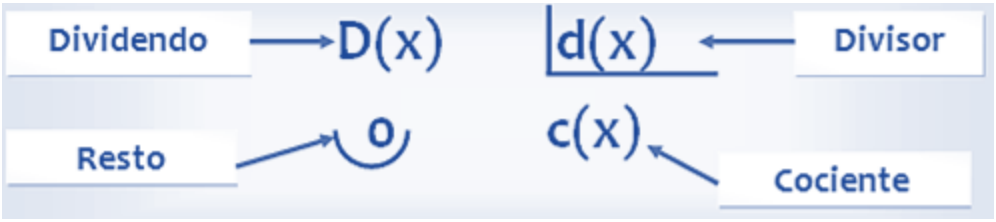
$$\begin{array}{rl} C(x) & 4x^2 + 3x \\ \text{x} & \\ Q(x) & 2x^2 \\ \hline \boldsymbol{Q(x).C(x) =} & 8x^4 + 6x^3 \end{array}$$

Luego sumamos el resto a este resultado, para eso completamos el polinomio:

$$\begin{array}{rl} Q(x).C(x) & 8x^4 + 6x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\ + & \\ R(x) & -4 \\ \hline \boldsymbol{Q(x).C(x) + R(x) =} & 8x^4 + 6x^3 + 0x^2 + 0x - 4 \end{array}$$

Por lo tanto, se verifica que $\boldsymbol{P(x) = Q(x).C(x) + R(x) = 8x^4 + 6x^3 - 4}$, lo que significa que la división está bien resuelta.

Si al efectuar la división, **el resto es cero**, se dice que **la división es exacta:**



Por lo tanto, se cumple que:

$$\boldsymbol{D(x) = d(x).c(x)}$$

Ya que en la propiedad fundamental de la división, al ser cero el resto, ese término se elimina.

De este modo se obtiene que el dividendo D(x) es múltiplo del divisor d(x) y del cociente c(x).

También se dice que d(x) y c(x) son divisores del polinomio D(x).

Veamos un ejemplo:

$D(x) = 4x^3 - 6x^2$ $\qquad$ $d(x) = 2x$

$4x^3 - 6x^2$ | $2x$

$-4x^3$ $\qquad$ $2x^2 - 3x$ ➔ Cociente: $c(x) = 2x^2 - 3x$

$0 \; - 6x^2$

$+6x^2$

0 ➔ Resto cero

Ahora verifiquemos que se cumpla que $\boldsymbol{D(x) = d(x).c(x)}$

$c(x)$	$2x^2 - 3x$
x	
$d(x)$	$2x$
$\boldsymbol{c(x).d(x) =}$	$4x^3 - 6x$

Como se verifica que $\boldsymbol{D(x) = d(x).c(x)} = 4x^3 - 6x$, entonces, la división está bien resuelta.