FUNCIONES

Una función es una relación que asigna a todos y cada uno de los valores de la variable independiente, uno y sólo un valor de la variable dependiente.

Ejemplo:

- La temperatura del agua que está en un cazo al fuego depende de la cantidad de calor que recibe, así decimos que: *la temperatura del agua **T** varía **en función del** calor recibido **Q***, o simplemente que **T** está en función de **Q**.

Cuando realizamos un viaje en coche podemos observar varias magnitudes; vamos a estudiar la relación entre dos de ellas, por ejemplo la distancia recorrida y el tiempo transcurrido desde la salida.

Según sea nuestro viaje y lo que hagamos durante su recorrido (ir por autopista o por una carretera secundaria, parar un rato, volver,...) la distancia recorrida según el tiempo transcurrido será mayor o menor, pero es claro que *la distancia está **en función** del tiempo*. En cada instante de tiempo habremos recorrido una distancia determinada.

Nota: Cuando tenemos una relación funcional entre dos variables en la que una es el tiempo que transcurre, esta, normalmente, es la variable independiente.

- **Cuando se trabaja con funciones, muy frecuentemente se designa con la letra x a los valores de la variable independiente y con la letra y o con la expresión $f(x)$ a los valores de la variable dependiente. En muchos casos, existe una *fórmula* que permite calcular cada valor de y conociendo el correspondiente valor de x.**

Ejemplos:

$f(x) = x + 2 \longrightarrow$ Significa que la función f asigna a cada valor de x el número y que se obtiene sumándole 2 a x.

$f(4) = 6 \longrightarrow$ Significa que la función f, al valor $x = 4$ le hace corresponder el valor $y = 6$; también se dice que 6 es la *imagen* de 4 a través de f.

TABLA DE VALORES, GRÁFICA, EXPRESIÓN VERBAL Y EXPRESIÓN ALGEBRAICA

La gran mayoría de las situaciones que hemos estudiado hasta este momento son relaciones funcionales en las que hay dos variables, y una depende de la otra de manera única; esto es, son ***funciones***.

Además hemos visto que las ***funciones*** se pueden representar de varias maneras; como una ***descripción verbal*** que describe una situación, como una ***tabla de valores*** que nos indica los valores correspondientes de la relación, como una ***gráfica*** que nos visualiza la situación y como una ***expresión algebraica*** (fórmula) que nos relaciona las dos magnitudes.

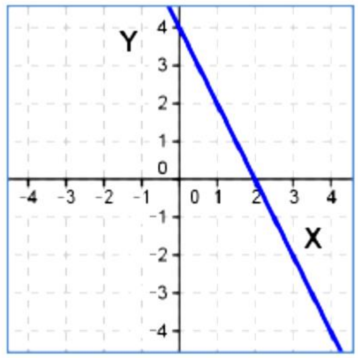
- Cuando tenemos una función que relaciona dos magnitudes que desconocemos, que las llamamos **X** e **Y**, la podemos tener definida por una fórmula (expresión algebraica).

Por ejemplo **$y = 4 - 2 \cdot x$**

De la que podemos elaborar una tabla de valores como la siguiente:

X	0	1	2	3	4
Y	4	2	0	–2	–4

y, a partir de ella, dibujar una gráfica:

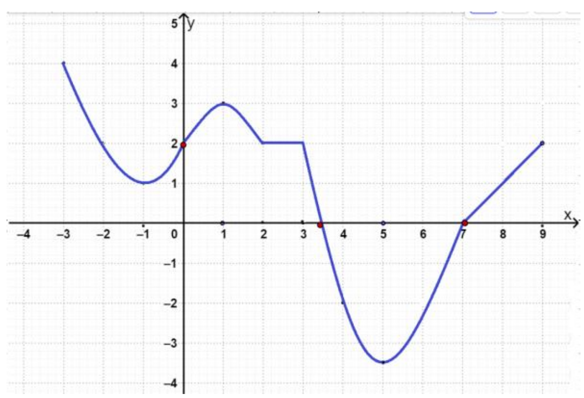


En este caso sí podemos unir los puntos, porque mediante su fórmula para cualquier valor ***x*** de la variable **X** podemos calcular el valor ***y*** de la variable **Y**.

Podríamos dar, también, una descripción verbal que defina la relación entre estas variables, por ejemplo: *"A cada número le corresponden cuatro unidades menos el doble del número"*

ANÁLISIS COMPLETO DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE SU GRÁFICO

A continuación se analiza la gráfica de la función f, definida por la gráfica:



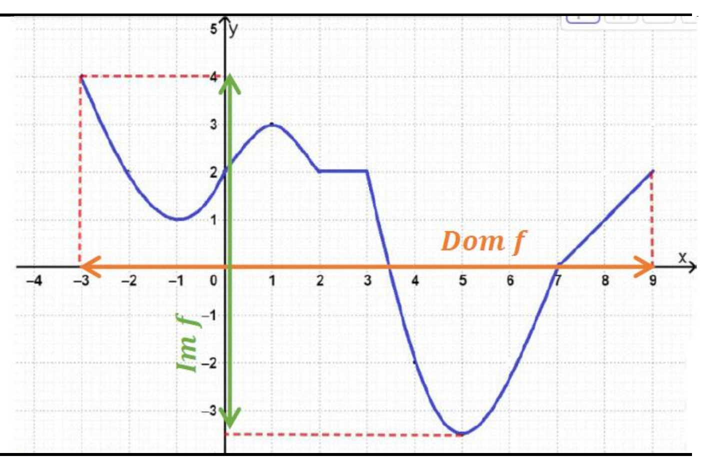
Observa atentamente la simbología utilizada. Se repite el gráfico para que se distinga mejor cómo se extrae cada uno de los datos.

Dominio: Se observa sobre el eje x. Desde el menor valor que toma la variable independiente hasta el mayor:

$$Dom\ f: [-3;\ 9]$$

Conjunto Imagen: Se observa sobre el eje y. Desde el menor valor que toma la variable dependiente, hasta el mayor valor:

$$Im\ f: [-3{,}5;\ 4]$$



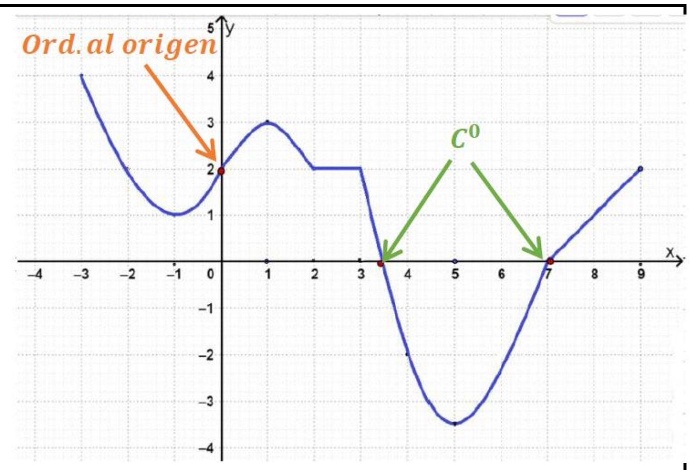
Ordenada al origen: Es la imagen de $x = 0$. Gráficamente es el valor donde la gráfica interseca al eje y.

$Ord. al\ Origen$: 2

Conjunto de ceros o raíces: Son los valores de x para los cuales su imagen en cero ($f(x) = 0$). Gráficamente son los valores donde la gráfica interseca al eje x.

$C^0 = \{3{,}5; 7\}$

Las funciones pueden tener más de una raíz, pero una única ordenada al origen.

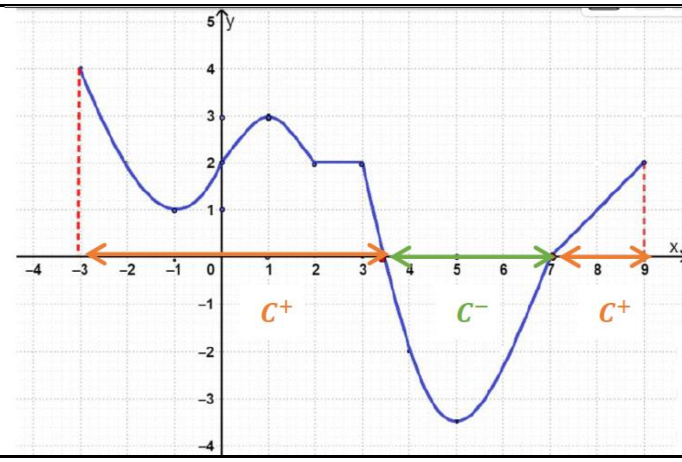


Conjunto de positividad: Es el subconjunto del dominio que tiene imágenes positivas. Gráficamente, la curva se encuentra sobre el eje x.

$C^+ = [-3; 3{,}5) \cup (7; 9]$

Conjunto de negatividad: Es el subconjunto del dominio que tiene imágenes negativas. Gráficamente, la curva se encuentra debajo del eje x.

$C^- = (3{,}5; 7)$



Intervalos de Crecimiento: Es el subconjunto del dominio para el cual la función es creciente, es decir, que a medida que aumenta x, aumenta f(x). Gráficamente, es el intervalo de los valores de x en el cual la curva asciende.

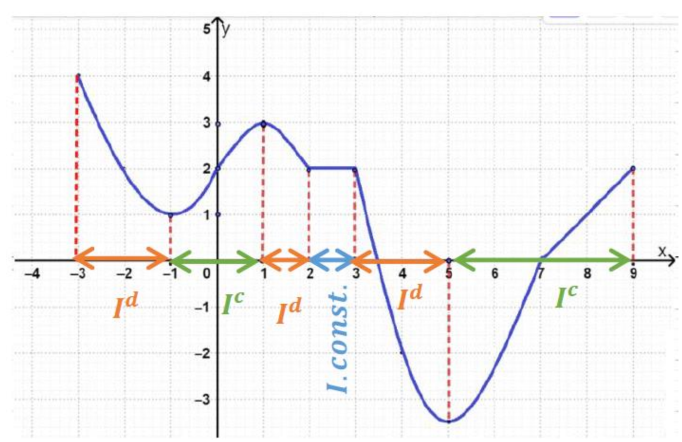
$I^c = (-1; 1) \cup (5; 9)$

Intervalos de Decrecimiento: Es el subconjunto del dominio para el cual la función es decreciente, es decir, que a medida que aumenta x, disminuye f(x). Gráficamente, es el intervalo de los valores de x en el cual la curva desciende.

$I^d = (-3; -1) \cup (1; 2) \cup (3; 5)$

Intervalos Constantes: Es el subconjunto del dominio para el cual la función es constante, es decir, que a medida que aumenta x, f(x) se mantiene igual. Gráficamente, es el intervalo de los valores de x en el cual la gráfica es una línea horizontal.

$I\ const. = (2; 3)$

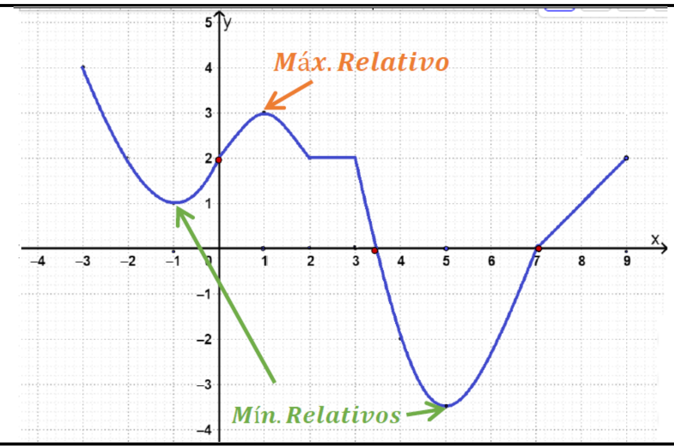


Máximos relativos: Son los puntos en los cuales la función pasa de ser creciente a ser decreciente. Por ser puntos, se deben indicar las dos coordenadas de estos:

$$Máx. Relativo: (1;\ 3)$$

Punto mínimo: Son los puntos en los cuales la función pasa de ser decreciente a ser creciente. Por ser puntos, se deben indicar las dos coordenadas de estos:

$$Mín. Relativos: (-1; 1), (5;\ -3{,}5)$$



Videos explicativos para el análisis de funciones por medio de su gráfica:

- **Dominio e imagen de una función:** https://youtu.be/FtSoi-lQMNA
- **Ejemplos de dominio e imagen de funciones:** https://youtu.be/UJM8o_oWdXk
- **Intervalos de crecimiento, de decrecimiento y constantes:** https://youtu.be/dcpst_xi8as
- **Conjunto de positividad, negatividad y conjunto de ceros:** https://youtu.be/l-t5YNyanW0
- **Puntos máximos y mínimos:** https://youtu.be/Wf5By2eS730?list=PLFx6eqvnPSu7SUyyCP9lNrOfQDtKOK_ir

FUNCIÓN AFÍN

Una **función afín** es aquella cuya gráfica es una línea recta. Simbólicamente se la expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{f(x) = ax + b,}$$ donde **a** y **b** son números reales

- a es la *pendiente:* representa cuánto varía $f(x)$ por cada unidad que aumenta x y gráficamente está asociada a la inclinación de la recta.
- b es la *ordenada al origen:* es el valor que toma $f(x)$ cuando $x = 0$; gráficamente es la ordenada del punto de contacto de la recta con el eje de las y.

Casos particulares de la función afín:

- Si **a = 0**, la función se denomina **constante**.
- Si **b = 0**, la función se denomina **lineal**.

En algunas partes encontrarán que se menciona a la función lineal como sinónimo de afín, pero en realidad, la función lineal es un caso particular de las funciones afines, donde la ordenada al origen es cero (es decir, su gráfico pasa por el origen de coordenadas)

Diferencias entre lineal y afín

Lineal: $\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}$ donde $\mathrm{b} = 0$ (lo vemos en la función de proporcionalidad directa)

Afín: $\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$

En el caso de las funciones afines, como la variable independiente puede tomar cualquier valor real, se dice que su **dominio** es $Dom\ f = \mathbb{R}$, al igual que su conjunto **imagen** (siempre que $\mathrm{a} \neq 0$). En situaciones problemáticas contextualizadas esto puede variar, dependiendo qué magnitudes estén involucradas (por ejemplo, si una magnitud es el tiempo, no podemos trabajar con valores negativos, o si una variable es la cantidad de objetos que no pueden fraccionarse, solo podremos considerar números naturales).
Como su representación es una línea recta, serán **crecientes** o **decrecientes** en todo su dominio (una misma función afín no puede tener intervalos de crecimiento y de decrecimiento). No tienen punto **máximo** ni **mínimo**, a excepción de los casos en los que se trabajen situaciones problemáticas, donde se considere un dominio acotado de la función, dependiendo del contexto y de las magnitudes involucradas.

Tienen solo una **raíz o cero**, y su **ordenada al origen** es el término independiente de su expresión algebraica.

CÁLCULO ANALÍTICO DE LAS INTERSECCIONES CON LOS EJES:

Ordenada al origen: Se reemplaza la x por cero en la función y se resuelve, es decir, se calcula $f(0) =$

Ceros o raíces: Se iguala la función a cero y se despeja la x, es decir, $f(x) = 0$

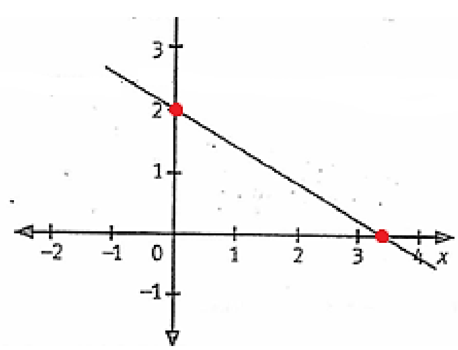
Por ejemplo: En la función $f(x) = \frac{3}{5}x + 2$

Para calcular la ordenada al origen, reemplazo la x por cero:

$$f(0) = \frac{3}{5} . 0 + 2$$
$$f(0) = 0 + 2$$
$$\boxed{f(0) = 2}$$

Para calcular la raíz o cero, igualo la función a cero:

$$f(x) = -\frac{3}{5}x + 2$$
$$0 = -\frac{3}{5}x + 2$$
$$-2 = -\frac{3}{5}x$$
$$-2 : \left(-\frac{3}{5}\right) = x$$
$$\frac{10}{3} = x$$



En el gráfico se puede ver como la ordenada al origen calculada coincide con el valor donde la recta corta al eje de ordenadas (y), y la raíz calculada coincide con el valor donde la recta corta al eje de abscisas (x).

Función Lineal y Afín: https://www.youtube.com/watch?v=3wnlk422oA4

GRÁFICO DE UNA RECTA MEDIANTE LA FORMA ORDENADA-PENDIENTE

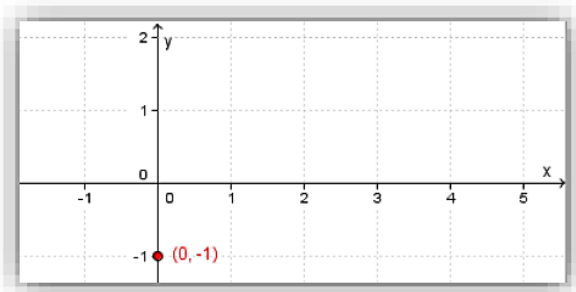
Para graficar una recta, partiendo de su ecuación en forma explícita, en muchos casos resulta conveniente seguir estos pasos:

Ejemplo: Representación de la recta $y = \frac{2}{3}x - 1$

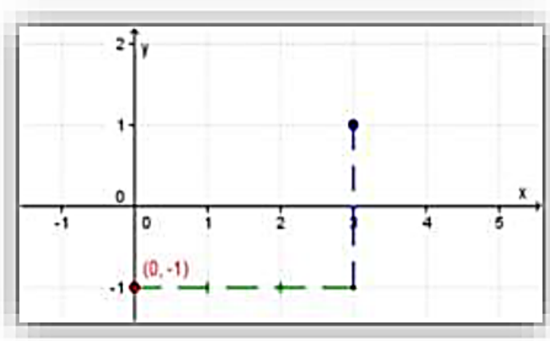
- ***1^er^ Paso:*** Identificamos la ordenada al origen y la pendiente:

  $b = -1$ $\qquad\qquad$ $a = \frac{2}{3}$

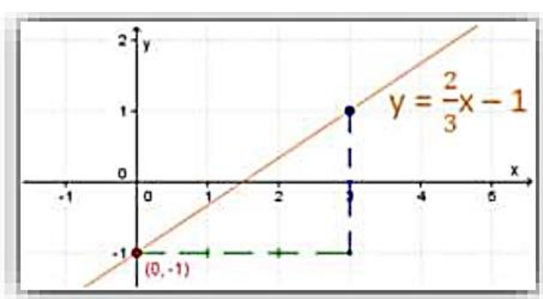
- ***2^do^ Paso:*** Como la ordenada al origen es -1, la recta corta el eje *y* en el punto (0; -1). Marcamos ese punto:



- ***3^er^ Paso:*** Como la pendiente es $\frac{2}{3}$, significa que por cada 3 unidades que aumenta *x*, la variable *y* aumenta 2 unidades; entonces desde la ordenada al origen nos desplazamos 3 unidades en el sentido positivo del eje *x* (hacia la derecha), y 2 unidades en el sentido positivo del eje *y* (hacia arriba, por ser positiva la pendiente). Allí marcamos otro punto.



- ***4^to^ Paso:*** Trazamos la recta que pasa por los dos puntos que marcamos.



De este modo, obtenemos la gráfica de la recta. A modo de síntesis, presentamos los pasos a continuación:

Pasos para graficar una recta:

1°) Identificamos la ordenada al origen y la pendiente.

2°) Marcamos la ordenada al origen en el gráfico.

3°) A partir de la ordenada al origen nos desplazamos hacia la derecha tantas unidades como indique el denominador de la pendiente, y subimos (o bajamos, si la pendiente es negativa) tantas unidades como indique el numerador, y marcamos allí otro punto.

4°) Trazamos la recta que pasa por los dos puntos marcados.

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 2: $y= -\frac{3}{4}x + 1$

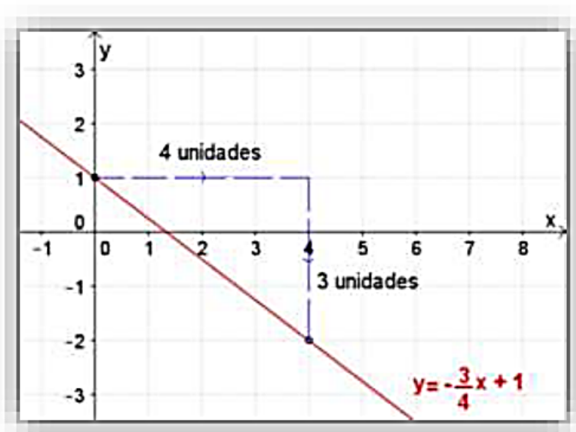
1°) Identificamos la ordenada al origen y la pendiente.

b= 1 $\qquad$ a= $-\frac{3}{4}$

2°) Marcamos la ordenada al origen en el gráfico.

3°) A partir de la ordenada al origen nos desplazamos hacia la derecha 4 unidades, como indica el denominador de la pendiente; y bajamos 3 unidades (por ser la pendiente negativa) como indica el numerador, y marcamos allí otro punto.

4°) Trazamos la recta que pasa por los dos puntos marcados.

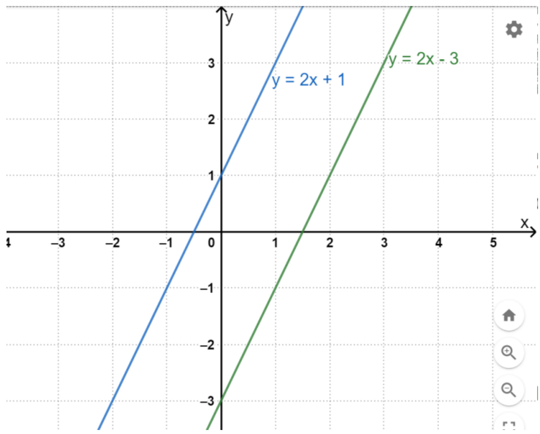


Para comprender mejor mira el video: "**Cómo graficar una función Afín**" https://youtu.be/eE_arxZcTbk

Aclaraciones: En algunos videos mencionan función lineal en vez de afín. Tengan en cuenta que en realidad hacen referencia a la función afín, y es así como la trabajaremos. Además, algunos videos expresan algebraicamente a la función afín como $y = mx + n$. Esto no modifica lo explicado anteriormente, simplemente utilizan la letra m para representar la pendiente (en vez de la letra a) y la n para representar la ordenada al origen (en vez de b). En definitiva, tanto a y b como m y n, simbolizan números reales.

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Si realizamos el gráfico de las rectas $y = 2x + 1$ e $y = 2\,x - 3$, podemos observar que son **paralelas**. Por su parte, si comparamos sus expresiones algebraicas podemos notar que sus **pendientes son iguales:**



$$y = \mathbf{2}x + 1 \ // \ y = \mathbf{2}\,x - 3$$

Esto se debe a que la pendiente de una recta indica gráficamente su inclinación con respecto a los ejes cartesianos. Entonces, si dos rectas tienen pendientes iguales, podemos afirmar que la inclinación de dichas rectas con respecto a los ejes cartesianos es la misma. Por ello concluimos que:

"Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales"

Para comprenderlo mejor, mira el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=251uScCbzhU&feature=youtu.be&list=PLFx6eqvnPSu42ucSGJdRSPQZQS3xBntEw

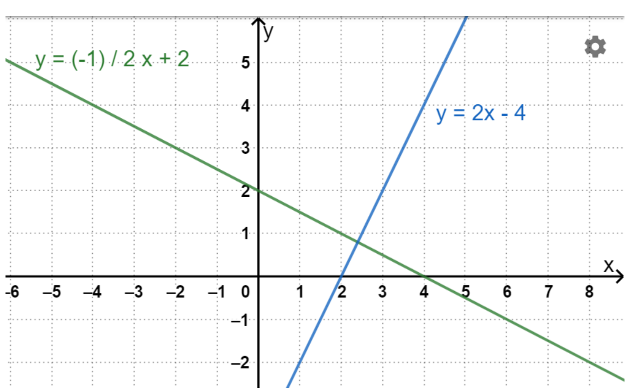
Por su parte, si realizamos el gráfico de las rectas $y = -\frac{1}{2}x + 2$ e $y = 2\,x - 4$, podemos observar que son **perpendiculares,** ya que la intersección de las rectas determina cuatro ángulos rectos. A su vez, si comparamos sus expresiones algebraicas podemos notar que sus **pendientes son recíprocas y opuestas, es decir, su producto es igual a -1.**

Recordemos

- Dos números son **recíprocos** si al multiplicarlos entre sí obtenemos como resultado 1 (observando los números expresados de forma fraccionaria podemos notar que el numerador de uno de los números es el denominador del otro, y viceversa). Por ej.: $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$ son recíprocos, ya que $\frac{3}{4} . \frac{4}{3} = 1$
- Dos números son **opuestos** si tienen el mismo módulo, pero distinto signo. Por ej.: 7 y -7 son opuestos.

En el ejemplo trabajado, gráficamente $y = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x + 2 \perp y = \mathbf{2}\,x - 4$. Sus pendientes son: $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ y $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}$.

(Recordemos que si la pendiente es un número entero se la puede expresar como una fracción de denominador 1, esto les será útil no solo para graficarla sino también para observar más fácilmente por medio de su expresión algebraica si las rectas son perpendiculares o no).



Si multiplicamos las pendientes, obtenemos -1:

$$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} . \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} = \mathbf{-1}$$

Entonces, podemos concluir que:

"Dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son recíprocas y opuestas, es decir, si el producto de sus pendientes es igual a -1"

Ejemplos de rectas perpendiculares:

- $y = -\frac{5}{6}x + 9 \perp y = \frac{6}{5}x$
- $y = -3x - 1 \perp y = \frac{1}{3}x + 9$

Simbología:

//: Paralela

⊥: Perpendicular

Para comprenderlo mejor, mira el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=Htb4qomYzNM&feature=youtu.be&list=PLFx6eqvnPSu42ucSGJdRSPQZQS3xBntEw

MODELIZACIÓN DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS CON FUNCIÓN AFÍN

Muchas situaciones de contextos reales pueden modelizarse a través de expresiones algebraicas. En esta clase trabajaremos con situaciones modelizables a partir de funciones afines. Es decir, donde la variable dependiente aumente o disminuya siempre en la misma proporción que la independiente. Analicemos la situación:

Tamara tiene un abono de celular con una compañía de teléfonos A que cobra un abono mensual de $500, y por cada minuto de una comunicación urbana cobra $2,50.

En la compañía telefónica A, el costo mensual depende del tiempo que duren las llamadas que realice. Como para cada duración de llamada hay un único costo, la relación entre el tiempo y el costo es una función. La **variable independiente** es la **duración de las llamadas** (en minutos) y la **variable dependiente** es el **costo mensual** (en pesos). *Es muy importante lograr determinar las variables que intervienen en la situación.*

También se puede ver que la compañía cobra un **monto inicial** ($500), y después, **por cada minuto** de llamada transcurrido, **siempre agrega la misma cantidad** de dinero ($2,50). Por lo tanto, el costo crecerá de forma lineal. *Leer con atención el enunciado permite determinar qué valores son fijos y cuáles variables.*

Por ejemplo, calculemos el costo de tres posibles duraciones de llamadas mensuales. Si habla por 30 minutos, deberá pagar los $500 iniciales, más $2,50 por cada minuto transcurrido. Este mismo razonamiento utilizaremos para calcular los otros dos costos posibles:

Duración de llamadas (min)	Costo mensual ($)
1	$500 + 2{,}50.1 = 502{,}50$
10	$500 + 2{,}50.10 = 525$
30	$500 + 2{,}50.30 = 575$

Armar una tabla de valores puede ayudar a encontrar la expresión algebraica que modeliza una situación.

En forma general, para cualquier duración x de llamadas mensuales, podemos plantear la expresión algebraica:

$$\boldsymbol{C(x) = 500 + 2{,}50.x}$$

La **ordenada al origen** (500) es el valor fijo, indica el costo mensual que pagará si no realiza ninguna llamada. La **pendiente** (2,50) es el valor variable, indica el incremento en su costo mensual por cada minuto que dure la llamada.

Para saber el costo mensual, solo es necesario reemplazar la x por la duración de las llamadas que haya realizado Tamara en el mes y resolver las operaciones que intervienen.

En el siguiente video podrás ver otro ejemplo de modelización de situaciones con funciones afines: https://www.youtube.com/watch?v=nhECoQeug-k

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Llamamos función cuadrática a toda función polinómica de la forma general:

$$f(x)= ax^2 + bx +c$$

Termino Cuadrático | Termino Lineal | Termino Independiente

Los coeficientes (números reales) **a**, **b** y **c**, son los coeficientes cuadrático, lineal e independiente, respectivamente. El término cuadrático debe ser distinto de cero, es decir "**a"** nunca puede valer 0, de lo contrario sería función afín (lineal).

La representación gráfica de la función cuadrática se denomina **parábola**.

Las funciones cuadráticas modelizan situaciones como:

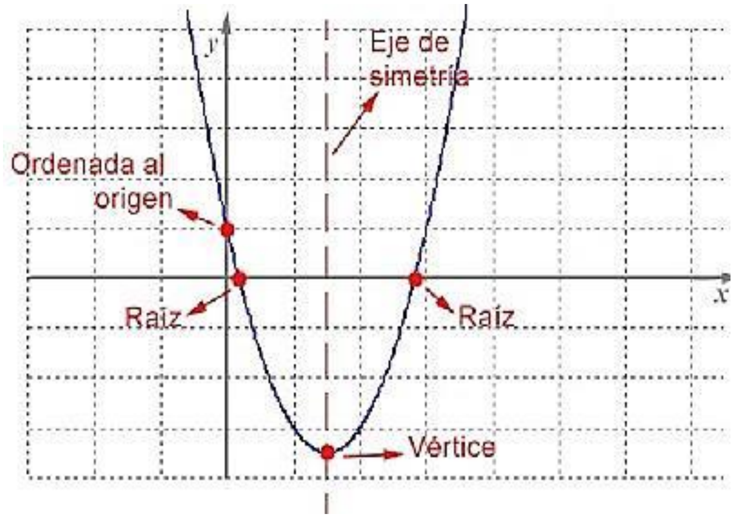
- Un proyectil lanzado hacia delante y arriba.
- Las antenas parabólicas satelitales y de telefonía.
- Los techos de galpones son parabólicos.
- Los puentes colgantes forman una parábola.

Para resolver problemas utilizando como modelos las funciones cuadráticas, es importante graficarlas para visualizar la situación y poder responder los interrogantes de un problema.

Para graficar una función cuadrática sin utilizar una tabla clásica de valores, podemos utilizar elementos característicos de la parábola como los son la ordenada al origen, el vértice (máximo o mínimo), las raíces y otros que veremos a continuación.

ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

Los **elementos característicos** de la **parábola** son:



- *Ordenada al origen:*

Es el punto donde la gráfica de la función corta al eje y. Es importante aclarar que la función cuadrática siempre tiene una ordenada al origen, y ésta es única. La misma puede calcularse reemplazando a x por 0 en la función, o simplemente observando el término independiente de la función en su forma polinómica al cual lo llamamos *"c"*.

- *Eje de simetría:*

Es una recta paralela al eje *y (vertical)*, que pasa por el vértice de la función. La misma "divide" a la parábola en dos ramas iguales, simétricas.

- *Vértice:*

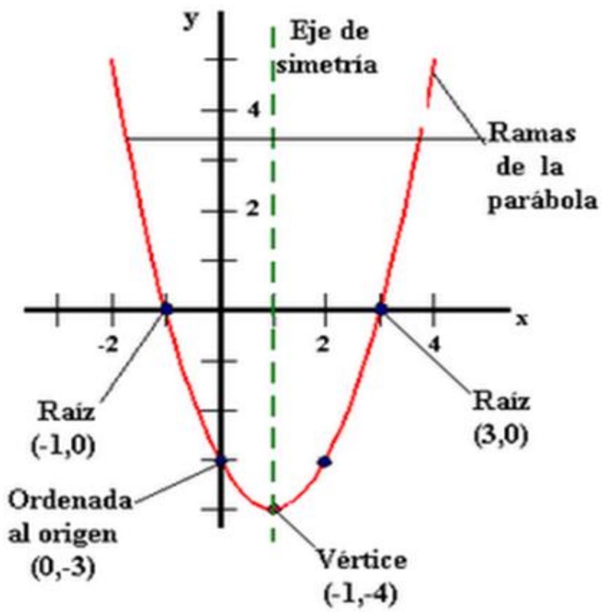
Es el punto del eje de simetría en que la función pasa de decreciente a creciente, o viceversa. Por lo tanto, la ordenada del vértice a la que llamaremos y_v , es el **mínimo** (o el **máximo**) valor en y de la función.

- *Raíces:*

Son los puntos por donde la gráfica de la función corta al eje x. Es importante mencionar que la función podrá tener dos, una, o ninguna raíz, dependiendo del valor de los coeficientes de la función.

Es muy importante que puedas identificar y definir cada uno de estos elementos que corresponden a la gráfica de una función cuadrática.

Ejemplo numérico:



RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE LA EXPRESIÓN POLINÓMICA Y LAS CARACTERÍSTICAS Y DESLIZAMIENTOS DE LA PARÁBOLA

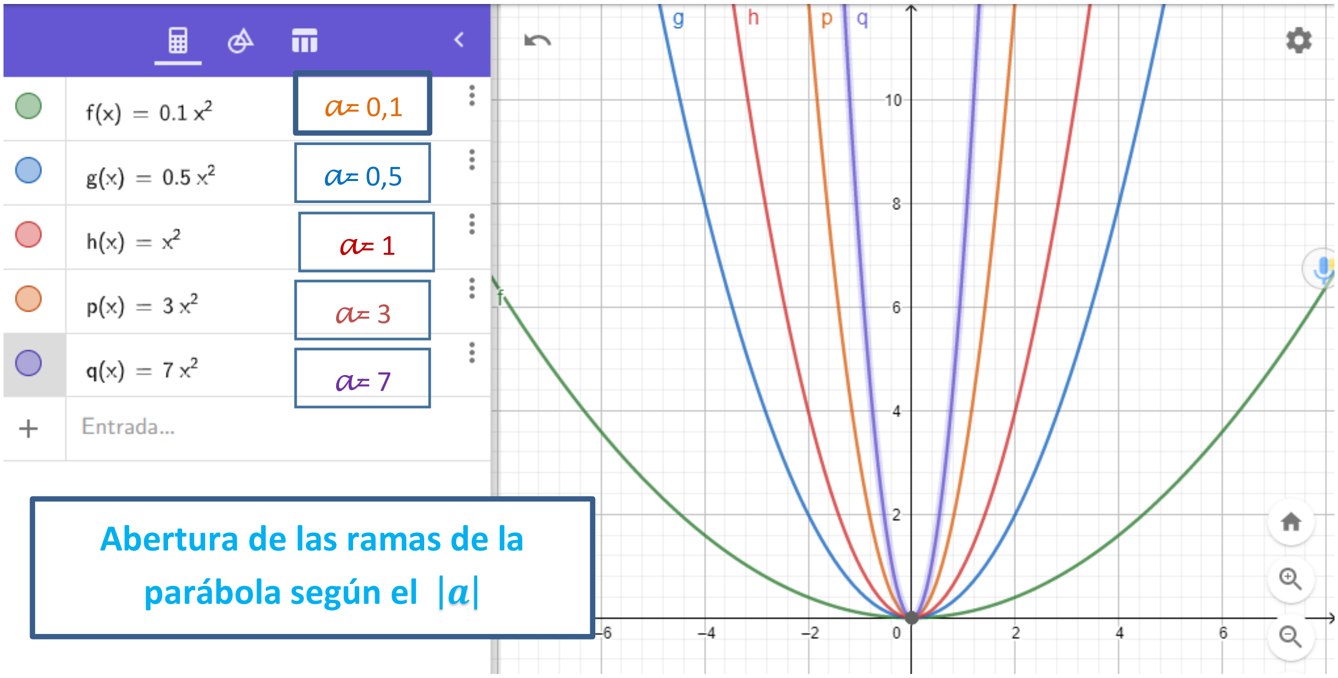
Considerando los coeficientes a, b y c de la función cuadrática cuya expresión algebraica es $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos expresar que:

- *Coeficiente principal o cuadrático:*

Es el nombre que se le da al coeficiente del término cuadrático (a). Indica la orientación de las ramas y la abertura de la parábola.

Abertura de las ramas

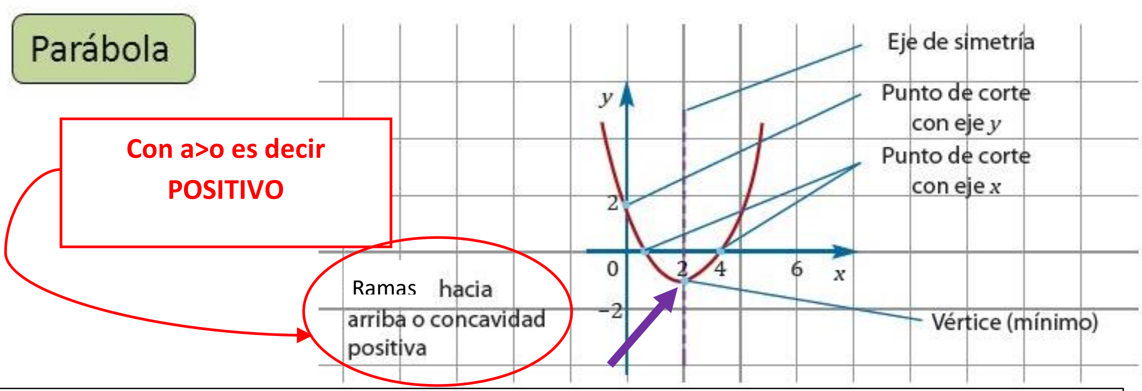
Cuanto **mayor sea** $|a|$, es decir, cuanto mayor sea el valor absoluto de a, más *CERRADAS* estarán las ramas de la parábola



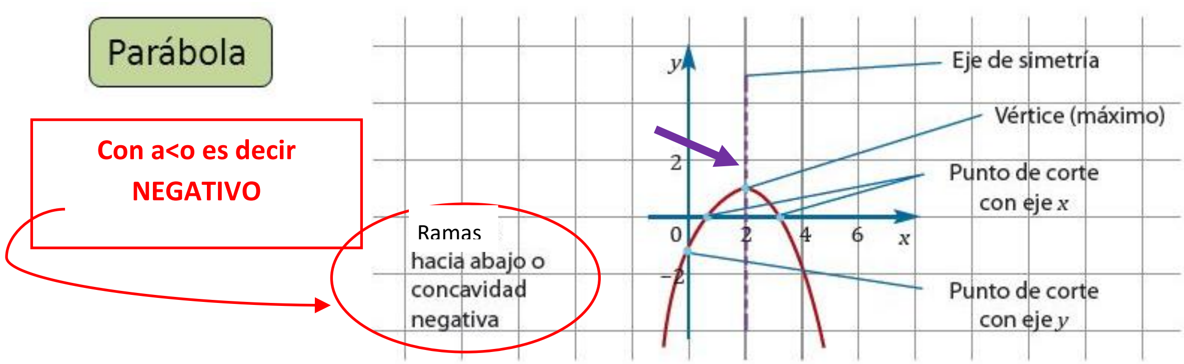
En estás graficas de funciones cuadráticas **b** *y c* valen cero, cada expresión está asociada a un color distinto para que puedas ver que cuando ***"a"*** aumenta su valor (valor absoluto), las ramas se van cerrando. Sí ***"a"*** fuera negativo ocurriría exactamente igual pero con sus ramas hacia abajo.

Orientación de la parábola y elementos característicos

La parábola puede adoptar 2 posiciones según el signo de ***"a"***



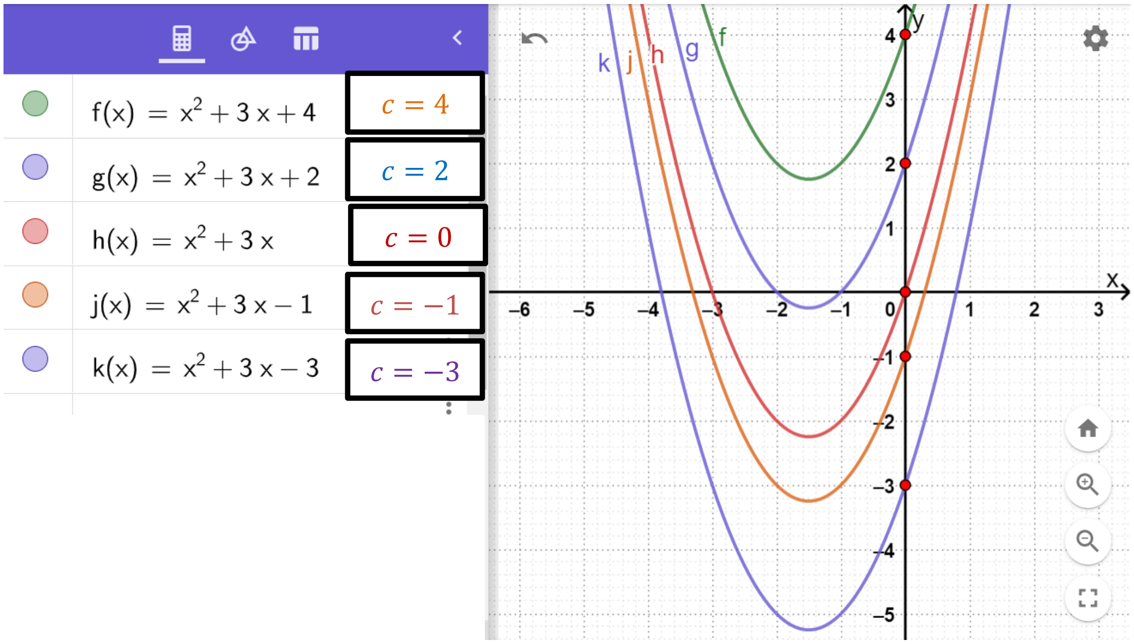
Cuando la parábola tiene concavidad positiva, el vértice es el punto mínimo.



Cuando la parábola tiene concavidad negativa, el vértice es el punto máximo.

- ***Término independiente***

El término independiente **c** representa la ordenada al origen de la función, por lo que al modificar su valor, manteniendo fijos **a** y **b**, la parábola se desplaza verticalmente, manteniendo su abertura y concavidad (ya que eso depende exclusivamente de **a**).



Si en particular **b** es cero, la parábola es simétrica respecto al eje y, por lo que la ordenada al origen coincide con su vértice: