Escuela Normal "José María Torres"

Espacio curricular: Matemática

Año: 6to

Divisiones: 2da, 3era, 4ta y 5ta.

Profesoras: Lidya Caffaro, Andrea Cian y Andrea Martínez.

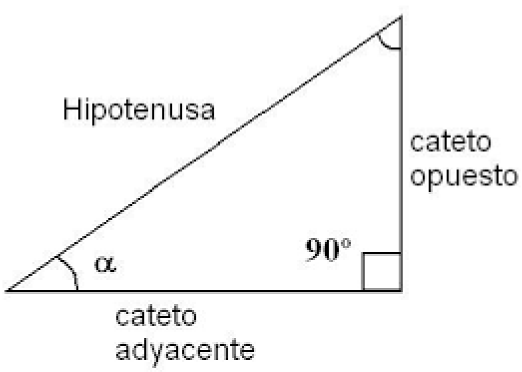
RESUMEN

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es determinar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

En un triángulo rectángulo tenemos que tener en cuenta las relaciones entre sus lados y ángulos y que además siempre conocemos uno de sus ángulos, el recto.

Elementos conocidos	Cómo se calculan los demás
CASO I: Dos lados	El tercer lado se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras
	El ángulo que forman dos lados conocidos se determina a partir de la razón trigonométrica que los relaciona
CASO II: Un lado y un ángulo	Otro lado se calcula mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y con el ángulo conocidos.
	El otro ángulo agudo es el complementario del que conocemos.



Teorema de Pitágoras

$H^2 = c^2 + c^2$ Solo lo podemos aplicar si tenemos el valor de 2 lados.

Razones trigonométricas:

Sen α = $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ Cos α = $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ Tan α = $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

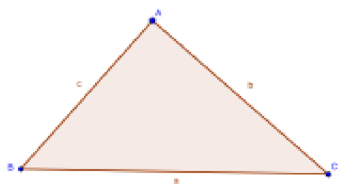
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALQUIERA (oblicuángulos)

Para resolver un triángulo que no es rectángulo tenemos dos opciones:

- Descomponer dicho triángulo en dos triángulos rectángulos gracias a una de sus alturas
- Utilizar los teoremas del seno y el coseno para calcular los elementos desconocidos.

- **TEOREMA DEL SENO:**

En un triángulo cualquiera de lados a, b c, y de ángulos $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, se cumplen las siguientes igualdades:



$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}}$$

- **TEOREMA DEL COSENO:**

En un triángulo cualquiera de lados a, b c, y de ángulos $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

Análogamente:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}} \qquad \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}}$$

Elementos conocidos	Cómo se calculan los demás
CASO I: Dos ángulos y un lado	Con el teorema del seno podemos calcular el otro lado
CASO II: Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos	Con el teorema del seno podemos calcular otro ángulo
	Con el teorema del coseno calculamos el otro lado
CASO III: Los tres lados	Con el teorema del coseno calculamos cualquier ángulo
CASO IV: Dos lados y el ángulo que forman	Con el teorema del coseno calcularemos el otro lado y, después, con el teorema del seno, determinaremos cualquiera de los ángulos.

Teorema del seno. Para aplicar este Teorema debes tener como datos:

Caso 1: dos ángulos y un lado.

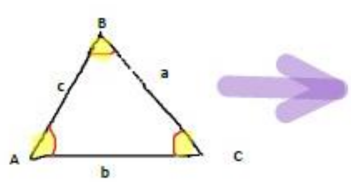
Caso 2: dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

El Teorema del coseno permite hallar cuánto mide el lado de un triángulo no rectángulo, es decir, un triángulo oblicuángulo, e incluso los ángulos, no obstante, para ello se deben tener algunos datos en concreto. En primer lugar, para hallar el lado que se desconoce de un triángulo oblicuángulo necesitaremos saber cuánto miden los otros dos lados y el ángulo adyacente entre estos dos lados, es decir, el ángulo opuesto al lado desconocido.

Y si se desconocen todos los ángulos, será necesario conocer cuánto miden todos los lados, es decir, tener el valor de a, b y c

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$$

Válido para todos los triángulos



DEPENDIENDO LOS DATOS

Teorema del Seno

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$$

EJEMPLO TEOREMA DEL SENO

60----1hora
x ---- 3 horas
60/x= 1/3
60.3= x.1

TEOREMA DEL COSENO

- **TEOREMA DEL COSENO:**

En un triángulo cualquiera de lados a, b c, y de ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

DATOS

Análogamente:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}} \qquad \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}}$$

Logaritmos

Los logaritmos se han convertido desde su creación en una herramienta importante para el cálculo de operaciones con números muy grandes, debido a que tienen la propiedad de trabajar con exponentes y convierte los problemas de multiplicación en problemas de suma. El logaritmo también, gracias a sus propiedades, permite simplificar diversas operaciones matemáticas. Una de ellas es la resolución de ecuaciones exponenciales. Por ejemplo:

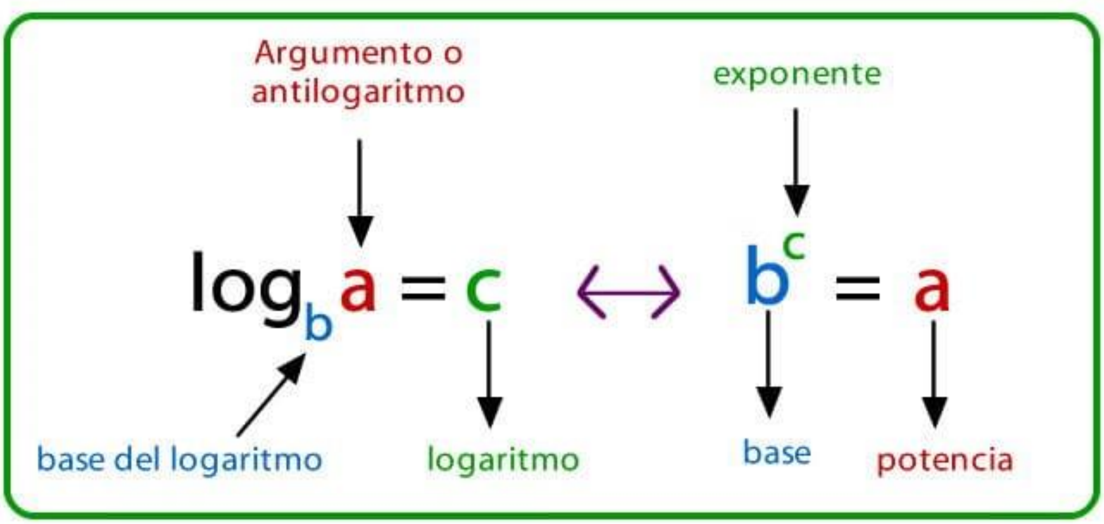
$$3^x = 5^{x+1}$$

Las funciones logarítmicas suelen ser muy interesantes en sí mismas, y son muy comunes en el mundo que nos rodea. Como ejemplo, muchos fenómenos físicos se pueden cuantificar utilizando las escalas logarítmicas. Por esto y más vale la pena su estudio.

Definición

El logaritmo en base b de un número $a > 0$ se representa por $\log_b(a)$ y es el número c que cumple: $b^c = a$.

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$



Ejemplos

$\log_2 4 = 2$ ya que $2^2 = 4$ ***Se lee**: logaritmo en base 2 de 4 es igual a 2*

***Interpretación**: ¿a qué exponente elevo el 2 para que me dé 4? Y compruebo con la potenciación*

$\log_3 9 = 2$ ya que $3^2 = 9$

$\log_2 32 = 5$ ya que $2^5 = 32$

- ***De la definición de logaritmo podemos decir que:***

- No existe el logaritmo con base negativa.

$$\nexists \ \log_{-b} x$$

- No existe el logaritmo de un número negativo.

$$\nexists \ \log_b -x$$

- No existe el logaritmo de cero.

$$\nexists \ \log_b 0$$

- El logaritmo de 1 es cero.

$$\log_b 1 = 0$$

- El logaritmo en base b de b es uno.

$$\log_b b = 1$$

- El logaritmo en base ***a*** de una potencia en base ***a*** es igual al exponente.

$$\log_b b^n = n$$

https://www.youtube.com/watch?v=pZTuEHrnOMg

- ***Logaritmos especiales***

Aunque la base de un logaritmo puede ser una de muchos valores, hay dos bases que se utilizan más que las demás.
Específicamente, la mayoría de las calculadoras tienen botones para estos dos tipos de logaritmos.

Logaritmo decimal
Es un logaritmo cuya base es 10 ("logaritmo base 10")
Al escribir estos logaritmos matemáticamente omitimos la base. Se entiende que es 10.

$$\log_{10}(x) = \log(x)$$

Logaritmo natural
Es un logaritmo cuya base es ***e*** ("logaritmo en base ***e***)

¿Qué es ***e***?
El número ***e*** es una constante matemática. Es un número irracional aproximadamente igual a 2,178. Aparece en muchos contextos que involucran límites, los cuales se utilizan en cálculo.

En lugar de escribir la base ***e***, indicamos este logaritmo como ***ln***

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

Aunque la notación es diferente, ¡la idea para evaluar un logaritmo es exactamente la misma!

https://www.youtube.com/watch?v=C0BIfEB0eJM&list=PLeySRPnY35dHyUzy-YVDD9ZllhtXfcQ4_&index=2

Propiedades de los logaritmos

1- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Ejemplo:

$$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

2- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Ejemplo:

$$\log_2 \left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$$

3- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

Ejemplo:

$$\log_2 (8^4) = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$$

4- El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$$

Ejemplo:

$$\log_2 (\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

5- Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

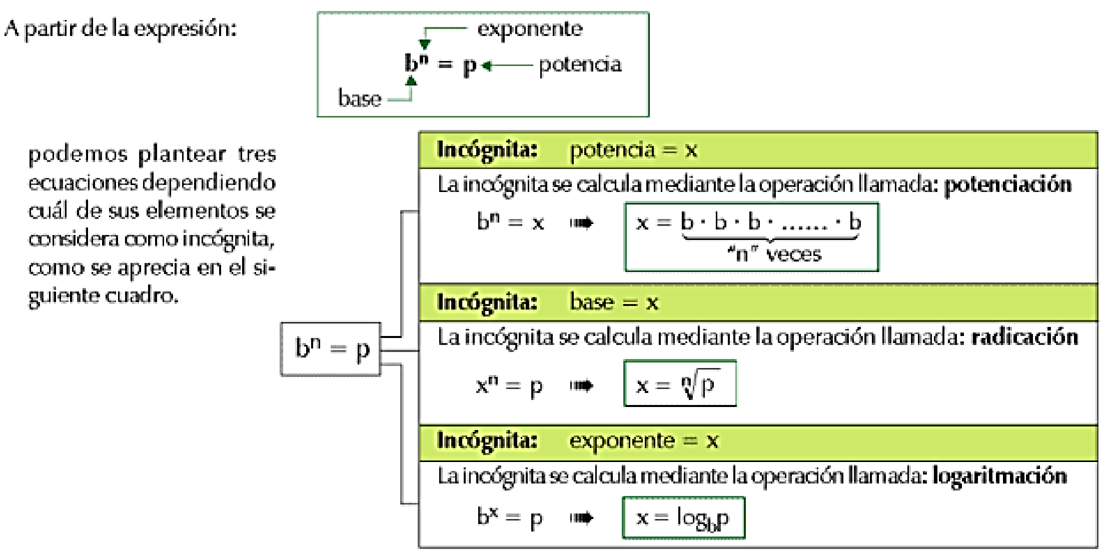
Ejemplo:

$$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Ecuaciones exponenciales

Recordemos:

Los logaritmos como una extensión de la potenciación



Las ***ecuaciones exponenciales*** son aquellas en las que la incógnita aparece en un exponente o en más de uno.

Para resolverlas, tendremos presente que:

- Siempre que sea posible, es conveniente expresar ambos miembros como potencias de una misma base.
- Para despejar incógnitas que aparecen en el exponente, es posible usar logaritmos.
- Cualquier logaritmo puede obtenerse con una calculadora científica.

<u>Ejemplos</u>

La ecuación por la que empezamos es una igualdad entre una exponencial y un número entero que puede escribirse como una potencia con la misma base que la exponencial.

- **Ecuación 1**

$$3^x = 27$$

Podemos escribir 27 como la potencia $3^3 = 27$ De este modo, la ecuación queda como:

$$3^x = 3^3$$

Tenemos una igualdad entre dos potencias con la misma base.

Para que la igualdad sea cierta, ambas potencias deben tener el mismo exponente:

$x = 3$

- **Ecuación 2**

$$2^{x+2} = 16$$

Escribimos 16 como una potencia de 2:

$$16 = 2^4$$

Podemos reescribir la ecuación como

$$2^{x+2} = 2^4 \quad \mathit{Bases\ iguales,\ exponentes\ iguales}$$

Por tanto, igualando los exponentes,

$$x + 2 = 4 \quad \rightarrow \qquad \text{Despejando x}$$

$$x = 4 - 2 = 2$$

Luego la solución de la ecuación exponencial es x=2

- **Ecuación 3**

$$(2^{x+1})^2 = 64$$

Escribimos 64 como una potencia de 2:

$$64 = 2^6$$

Operamos en la ecuación usando las propiedades de las potencias

$2^{2(x+1)} = 2^6$ Aplicamos prop. distributiva

Bases iguales exponentes iguales $\rightarrow$ $2^{2x+2} = 2^6$

Por tanto, obtenemos una ecuación de primer grado:

$2x + 2 = 6 \quad \rightarrow$ Despejamos x

$2x = 4 \quad \rightarrow$

$x = 2$

- **Ecuación 4**

$$9^{\,x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

Expresamos 9 y $\frac{1}{3}$ como potencias de base 3.

$$(3^2)^{\,x-1} = (3^{-1})^{\,2x}$$

Aplicamos la propiedad de *potencia de potencia*:

$$3^{\,2x-2} = 3^{\,-2x}$$

Bases iguales, exponentes iguales, entonces igualamos los exponentes:

$$2x - 2 = -2x$$

Despejamos x:

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

- **A veces escribiremos las exponenciales como un producto de potencias de igual base para poder resolver la ecuación.**

- **Ecuación 5**

Resolver la ecuación escribiendo la exponencial como un producto:

$$2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x} = 28$$

Escribimos la exponencial como un producto: *suma de exponentes viene de la multiplicación de potencias de igual base*

$$2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x} = 28$$

$$2 \cdot 2^{x} + 5 \cdot 2^{x} = 28$$

Podemos extraer factor común de 2^x:

$$2^{x}(2+5) = 28$$

$$7 \cdot 2^{x} = 28$$

$$2^{x} = \frac{28}{7}$$

$$2^{x} = 4$$

$$2^{x} = 2^{2}$$

$$x = 2$$

- **Ecuación 6**

$$2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$$

Aplicando las propiedades de las potencias, en un cálculo auxiliar descomponemos la expresión:

$$2^{x+1} = 2^{x} \cdot 2^{1} = 2^{x} \cdot 2 \;;$$

$$2^{x-1} = 2^{x} \cdot 2^{-1} = \frac{2^{x}}{2}$$

Con lo que podemos reescribir la ecuación como:

$$2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$$

$$2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2} = 20$$

De este modo podemos extraer factor común de 2^x:

$$2^x\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 20$$

$$2^x\left(\frac{4+1}{2}\right) = 20$$

$$2^x \cdot \frac{5}{2} = 20$$

$$2^x = 20 \cdot \frac{2}{5}$$

$$2^x = 8 = 2^3$$

Es decir, la solución es *x=3.*

- ***Cuando las bases de las potencias no son las mismas, recurrimos a la nueva operación para despejar***

- **Ecuación 7**

$2^x = 5$ *-las bases no son iguales por lo tanto no podemos aplicar las mismas estrategias anteriores, por lo cual vamos a recurrir a la séptima operación ya que la incógnita es un exponente, y para conocer exponentes existe la logaritmación.*

En este caso, por sencillez y porque los tenemos disponibles en la calculadora, aplicamos *logaritmos decimales* a ambos miembros:

$$2^x = 5$$

$$\log (2^x) = \log 5$$

$$x \cdot \log 2 = \log 5$$ Aplicamos la propiedad del ***logaritmo de una potencia***

$$x = \frac{\log 5}{\log 2}$$ Despejamos x

$x \approx 2{,}32$ Con la calculadora obtenemos x con la cantidad de decimales que nos interesen. ***No usamos el símbolo = sino aproximado como ocurría en trigonometría.***

Ecuaciones logarítmicas

Una **ecuación logarítmica** es una ecuación cuya incógnita (o incógnitas) se encuentra multiplicando o dividiendo a los logaritmos, en sus bases o en el argumento de los logaritmos (dentro de los logaritmos).

Ejemplos

- Incógnita en el argumento: $\log_2 (2x + 4) = 3$

- Incógnita en la base: $\log_x (7) = 3$
- Incógnita multiplicando: $x \cdot \log (3) + 5 = x \cdot \log (9)$

Nos vamos a centrar en las ecuaciones logarítmicas con la incógnita en los argumentos (como la primera ecuación de los ejemplos).

Para poder resolver la ecuación es imprescindible conocer las propiedades de los logaritmos y las propiedades de las potencias. Además, la resolución de estas ecuaciones conlleva la resolución de otro tipo de ecuaciones: ecuaciones lineales, de segundo grado, etc.

Recordatorio

- Si dos logaritmos (en la misma base) son iguales, sus argumentos también:

$\log_b(x) = \log_b(y) \Rightarrow x = y$

- El argumento de un logaritmo **debe ser positivo** (es recomendable **comprobar** que las soluciones no hacen que los argumentos sean no positivos).
- La base de un logaritmo debe ser positiva y distinta de 1.
- Si no se indica la base, consideraremos que es la decimal:

$$\log(x) = \log_{10}(x)$$

Ejemplos:

1 $log(x) = 2$

Para resolver esta ecuación basta con aplicar la definición de logaritmo:

$$10^2 = x$$

$$100 = x$$

$$x = 100$$

2 $log(x^2) = 8$

Podemos aplicar la propiedad: $logA^n = n \cdot logA$, despejar y posteriormente la definición.

$$2 \cdot log(x) = 8$$

$$log(x) = \frac{8}{2}$$

$$log(x) = 4$$

$$10^4 = x$$

$$x = 10000$$

3 $log_4(4 - 3x) = 3$

Aplicamos la definición y luego despejamos la variable x

$$4^3 = 4 - 3x$$

$$64 = 4 - 3x$$

$$3x = 4 - 64$$

$$3x = -60$$

$$x = -20$$

Ejemplo 4

log (2) + log (x+3) = log (x+5)

Aplicamos reciproca de la propiedad, entonces: La suma de dos logaritmos es el logaritmo del producto:

log (2·(x+3)) = log (x+5)

log (2x+6) = log (x+5)

Como los dos logaritmos son iguales, sus argumentos tienen que ser iguales. Por tanto,

2x+6 = x+5

Resolvemos la ecuación de primer grado:

2x−x = 5−6

X = −1

Es recomendable que siempre compruebes que los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial son positivos al sustituir la solución obtenida.

Comprobamos si la solución es válida:

x+3 = −1+3 = 2 > 0

x+5 = −1+5 = 4 > 0

La solución de la ecuación logarítmica es x=−1.