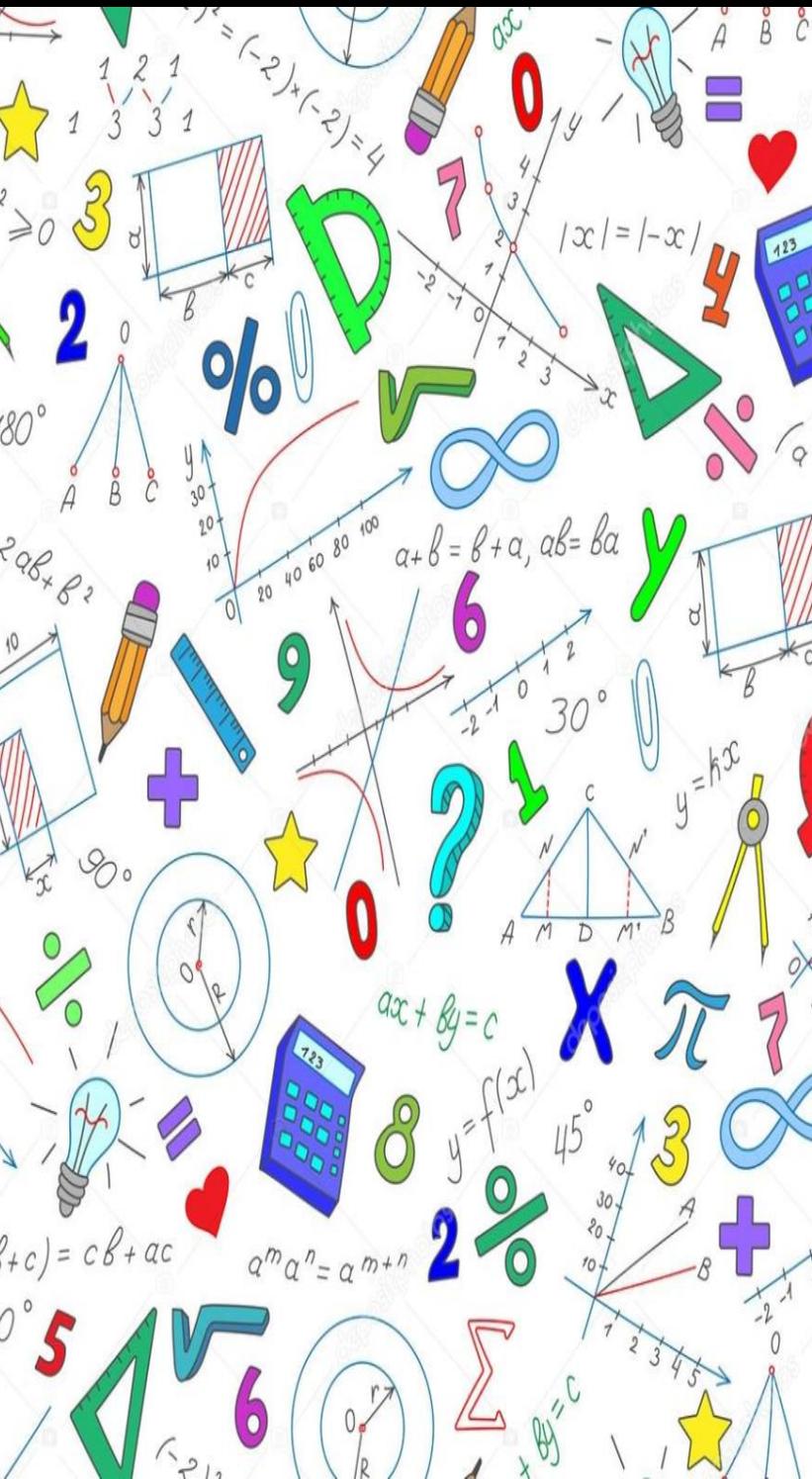


CICLO 2021

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES EN DOS VARIABLES LINEALES Y NO LINEALES (MIXTAS)



Elaborado por:

Andrea Cian

Lidya Caffaro

Andrea Martinez

CICLO 2021

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una, representa dos rectas en el plano, y resolverlo es hallar la intersección de ambas (conjunto solución).

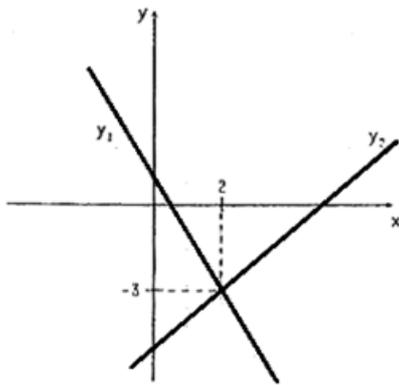
Dos rectas en un plano pueden ser **incidentes secantes** (tienen un punto en común) o **paralelas** (no tienen ningún punto en común) o son paralelas coincidentes (infinitos puntos en común).

Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones, se deben representar ambas rectas en un mismo sistema de ejes y hallar la intersección de ambas.

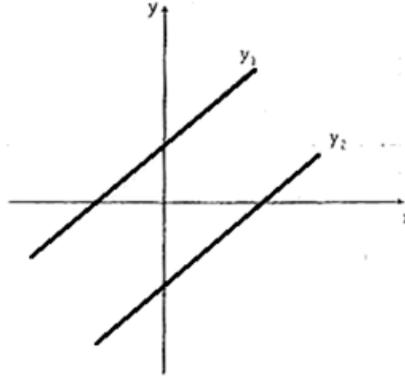
Como, no siempre las expresiones de dichas rectas (funciones afín) estarán dadas en forma explícita ($y = ax + b$), debemos despejar **y**, y expresarlas de manera que podamos identificar pendiente y ordenada al origen para poder representarlas gráficamente en un mismo sistema de ejes cartesianos

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2x + 1 \\ y_2 = -x - 5 \end{cases}$



$S = \{(2; -3)\}$

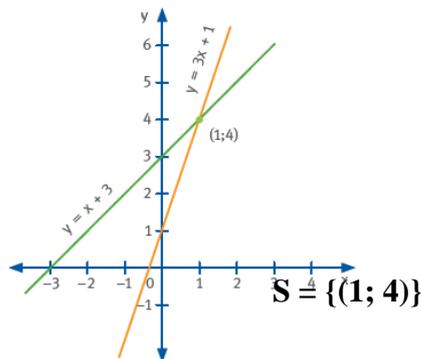
b) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ -x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x + 2 \\ y_2 = x - 3 \end{cases}$



$S = \emptyset$

c)

$\begin{cases} 2x - 2y = -6 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \begin{matrix} \longrightarrow \text{Entonces, } y = x + 3 \\ \longrightarrow \text{Entonces, } y = 3x + 1 \end{matrix}$



$S = \{(1; 4)\}$

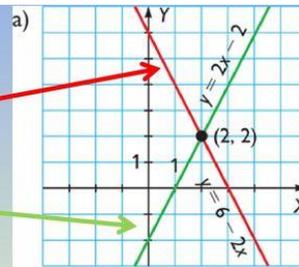
Clasificación de sistemas

$$\begin{cases} y + 2x = 6 \\ y + 2 = 2x \end{cases}$$

$$y = 6 - 2x$$

$$y = 2x - 2$$

Tiene solución unida: **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**

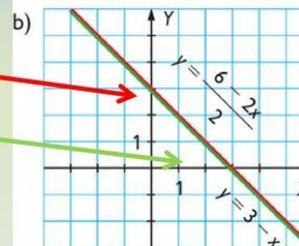


$$\begin{cases} 2y + 2x = 6 \\ y + x = 3 \end{cases}$$

$$y = (6 - 2x) : 2$$

$$y = 3 - x$$

Tiene infinitas solución : **SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO**

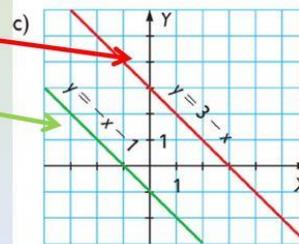


$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$y = 3 - x$$

$$y = -x - 1$$

No tiene solución unida: **SISTEMA INCOMPATIBLE**



Probamos lo aprendido:

Ingresa al link siguiente <https://es.liveworksheets.com/vt338588by>

para trabajar en una actividad interactiva.

Luego de finalizado, toma una instantánea de la página ya resuelta y corregida y guárdala.

Resolución analítica de un sistema de ecuaciones lineales

Existen varios métodos para resolver analíticamente un sistema de ecuaciones. Todos ellos permiten obtener el mismo resultado, y la utilización de uno u otro dependerá de cómo está planteado el sistema original.

Método de igualación: se debe despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita y luego igualar las ecuaciones obtenidas.

Vamos a resolver con este método el sistema de ecuaciones del ejemplo c):

$$\begin{cases} 2x - 2y = -6 & \longrightarrow & y = x + 3 \\ 3x - y = -1 & \longrightarrow & y = 3x + 1 \end{cases}$$

1. Se despeja la misma incógnita de ambas ecuaciones (en este caso y).

$$x + 3 = 3x + 1$$

$$3 - 1 = 3x - x$$

2. Se igualan las ecuaciones y se resuelve la ecuación.

$$x = 1$$

$$y = 1 + 3$$

3. Se reemplaza el valor obtenido de x en la primera ecuación.

$$y = 4$$

4. Se escribe el conjunto solución.

$$S = \{(1;4)\}$$

Probamos lo aprendido:

Ingresa al siguiente link (en azul) para trabajar en una actividad interactiva
 Luego de finalizado, toma una instantánea de la página ya resuelta y corregida y guárdala.
<https://es.liveworksheets.com/c?a=s&t=ty8si538hm&sr=n&l=ee&i=uccctts&r=on&db=0>

Método de sustitución: se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones, y luego reemplazar la en la otra ecuación.

En el ejemplo c:

$$\begin{cases} 2x - 2y = -6 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \longrightarrow y = x + 3$$

1. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

2. Se reemplaza en la otra ecuación.

3. Se resuelve la ecuación obtenida.

4. Se reemplaza el valor obtenido de x , en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} 3x - (x + 3) &= -1 \\ 3x - x - 3 &= -1 \\ 2x &= -1 + 3 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 - 2y &= -6 \\ 2 - 2y &= -6 \\ -2y &= -6 - 2 \\ -2y &= -8 \\ y &= (-8) : (-2) \\ y &= 4 \end{aligned}$$

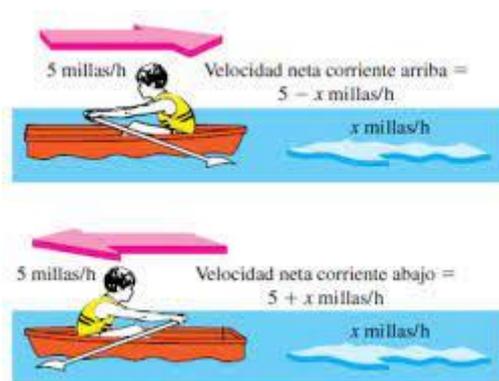
$$S = \{(1;4)\}$$

5. Se escribe el conjunto solución.

Probamos lo aprendido:

Ingresa al siguiente link (en azul) para trabajar en una actividad interactiva
 Luego de finalizado, toma una instantánea de la página ya resuelta y corregida y guárdala.
<https://es.liveworksheets.com/oh1491117xk>

Que interesante!: No tenés que resolver nada solo ,te contamos cuales son algunas de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones, en la vida cotidiana:



PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES

Como lo importante es plantear el sistema de ecuaciones, no resolvemos detalladamente los sistemas.

Método de resolución:

1. Obtener los datos
2. Identificar las incógnitas x e y
3. Plantear el sistema de dos ecuaciones
4. Resolver el sistema

EJEMPLOS

Problema 1

Hallar dos números sabiendo que su suma es 15 y su resta es 3.

Solución

Incógnitas:

- x es uno de los números
- y es el otro número

Ecuaciones:

La suma de los números es 15:

$$x + y = 15$$

La resta de los números es 3:

$$x - y = 3$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \end{cases}$$

Por tanto, los números son 9 y 6.

Problema 2

Miguel es mayor que su hermana María. Dentro de 3 años, la edad de María será la edad que tiene ahora Miguel y, dentro de 10

años, la edad de Miguel será el doble de la edad que tiene María. ¿Qué edades tienen los hermanos?

Solución

Incógnitas:

- x es la edad de María
- y es la edad de Miguel

Ecuaciones:

La edad de María dentro de 3 años es $x+3$, que es la misma que la edad de Miguel:

$$x + 3 = y$$

La edad de Miguel dentro de 10 años es $y+10$, que es el doble de la edad de María:

$$y + 10 = 2x$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 13 \\ y = 16 \end{cases}$$

La edad de María es 13 y la de Miguel es 16.

Actividades:

1) Resuelvan los siguientes sistemas por el método de igualación.

$$\text{a) } \begin{cases} -6x + 5y = -2 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

2) Resuelvan los siguientes sistemas por el método de sustitución.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{2}{3}x - 5y = -3 \\ 2x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{2} \end{cases}$$

3) Planteen y resuelvan cada uno de los siguientes problemas.

a) La diferencia entre dos números es 3, y la suma entre el mayor de ellos y el doble del menor es 27. ¿Cuáles son los números?

b) Si la diferencia entre dos números de dos cifras, cuyas cifras son iguales pero en distinto orden, es 36, y la suma de las cifras de cualquiera de los dos números es 10. ¿Cuáles son los números?

c) En una alcancía hay 32 monedas de \$0,25 y \$ 0,05. Si en total hay \$ 5, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la alcancía?

d) En un trapecio isósceles la base mayor es el doble que la menor y su perímetro es de 42 cm. Si cada uno de los lados iguales es $\frac{3}{10}$ de la base mayor, ¿cuánto mide la base media del trapecio?

Sistemas de ecuaciones no lineales. Sistemas de ecuaciones mixtos

Los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas o variables no lineales, son aquellos en los cuales una o ambas de las ecuaciones que forman el sistema es una ecuación no lineal, es decir, cuando alguna de las incógnitas que forman parte de la ecuación no son de primer grado.

Ejemplos de ecuaciones

1. $2x + 1 = 7$ 1 VARIABLE LINEAL
2. $x^2 - 4 = 0$ 1 VARIABLE NO LINEAL
CUADRÁTICA
3. $x - 2y = 3$ 2 VARIABLES LINEAL
4. $x^2 + y^2 = 4$ 2 VARIABLES NO LINEAL
CUADRÁTICA

En nuestro caso, en particular vamos a estudiar sistemas de ecuaciones con dos incógnitas no lineales donde intervienen ecuaciones de primer y segundo grado.

Los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas son mixtos cuando son no lineales. La solución de dicho sistema es el conjunto de pares ordenados (x,y) que lo verifiquen.

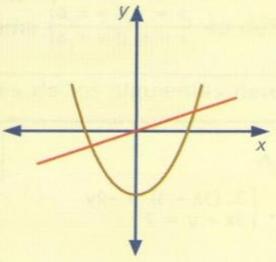
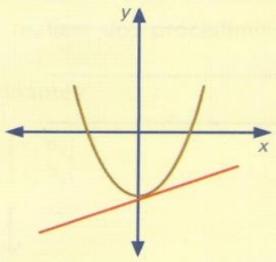
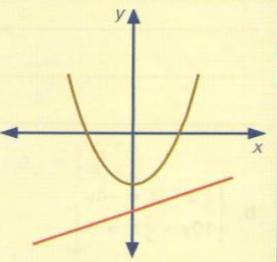
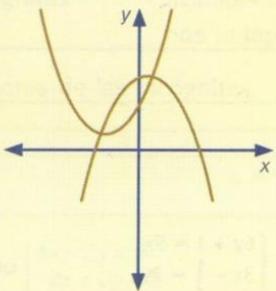
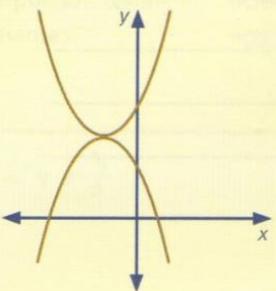
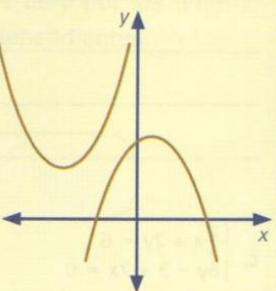
Gráficamente quedan representados por una recta y una parábola, o bien, por dos parábolas.

Existen distintos métodos de resolución analítica y también se pueden resolver de forma gráfica.

Dentro de los métodos analíticos vamos a trabajar con los llamados métodos de igualación y sustitución.

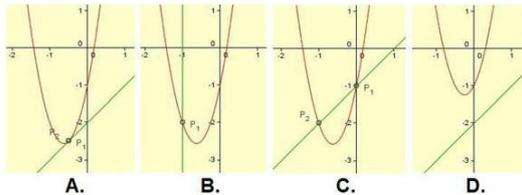
En los casos en que el sistema esté formado al menos por una ecuación de segundo grado, luego de haber aplicado algún método analítico para su resolución, nos quedará una ecuación cuadrática y podremos reconocer cuántas soluciones obtendremos, tiene el mismo analizando el discriminante de la ecuación cuadrática. que surge al resolver el sistema por el método de igualación o sustitución.

Analicemos lo dicho anteriormente pero desde el enfoque gráfico

	$\Delta > 0$ Dos puntos de intersección.	$\Delta = 0$ Un punto de intersección.	$\Delta < 0$ Ningún punto de intersección.
Sistema formado por una recta y una parábola. $\begin{cases} y = mx + d \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$	 La recta es secante a la parábola.	 La recta es tangente a la parábola.	 La recta es exterior a la parábola.
Sistema formado por dos parábolas. $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx^2 + ex + f \end{cases}$			

Tipos de soluciones

- Teniendo en cuenta la resolución gráfica podemos deducir que existen tres tipos de soluciones en estos sistemas:
 - Una sola solución: la recta y la parábola se cortan en un solo punto (ejemplo A y B)
 - Dos soluciones: la recta y la parábola se cortan en dos puntos. (ejemplo C)
 - Sin solución: la recta y la parábola no se intersecan. (ejemplo D)



Lo mismo ocurre si se trata de dos ecuaciones cuadráticas, es decir si fueran dos parábolas.

Para resolver analíticamente este tipo de sistema, se utilizan los métodos ya conocidos, eligiendo el más conveniente. Debes tener en cuenta que una de las ecuaciones es de segundo grado o ambas.

Ejemplo.

En este ejemplo vemos que se encuentra ya despejada la variable **y** de ambas ecuaciones y luego se recurre al método de igualación.

Luego de resolver analíticamente se realiza la resolución gráfica para que podamos comprender el significado gráfico de las soluciones obtenidas.

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

El sistema a resolver	$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 1 \\ y &= 3x - 11 \end{aligned}$			
Igualamos	<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 33%;">(1) $y = x^2 - 4x + 1$</td> <td style="border: none; text-align: center; padding: 5px;">$y = y$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 33%;">(2) $y = 3x - 11$</td> </tr> </table>	(1) $y = x^2 - 4x + 1$	$y = y$	(2) $y = 3x - 11$
(1) $y = x^2 - 4x + 1$	$y = y$	(2) $y = 3x - 11$		
Nos queda en este caso una ecuación cuadrática	$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 &= 3x - 11 \\ x^2 - 4x + 1 - 3x + 11 &= 0 \\ x^2 - 7x + 12 &= 0 \end{aligned}$			
Utilizamos la fórmula resolvente una vez que esta igualada a 0	$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2}$			
Para calcular y reemplazamos en (1) o (2)	$x_1 = \frac{7 - 1}{2} \qquad x_2 = \frac{7 + 1}{2}$			
los pares (x;y) que son	$x_1 = 3 \rightarrow \text{reemp. } y_1 = -2 \qquad x_2 = 4 \rightarrow \text{reempl. } y_2 = 1$			
Sol = { (3 ; - 2) , (4 ; 1) }				

RESOLUCIÓN GRÁFICA DEL SISTEMA

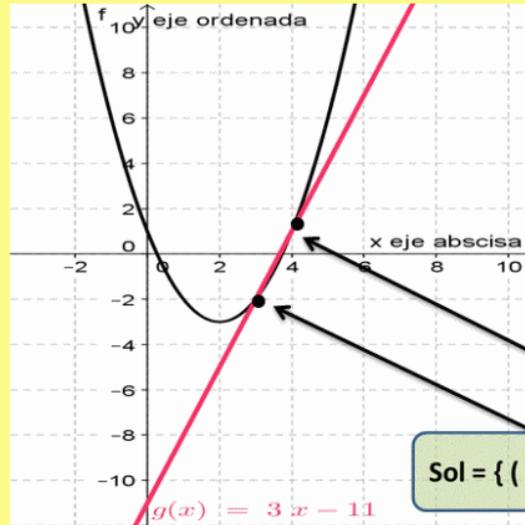
$$\begin{aligned}y &= x^2 - 4x + 1 \\ y &= 3x - 11\end{aligned}$$

Recordemos: la grafica una de una cuadrática es una:

PARABOLA !!!

Para representar la lineal lo haremos por **ORDENADA A ORIGEN** y **PENDIENTE**

- $y = x^2 - 4x + 1$
- Vértice $(2; -3)$
- $x_v = \frac{-b}{2a} = 2$
- $y_v = f(2) = -3$
- Ordenada al origen $f(0) = 1$
- Raíces
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $x_1 = \quad x_2 =$



- $y = 3x - 11$
- Ord. Al Orig. $b = -11$
- Pendiente $m = 3$

$$\text{Sol} = \{(3; -2), (4; 1)\}$$

ACTIVIDADES

4) Resuelve en tu carpeta los siguientes sistemas con los métodos indicados en cada ítem:

$$a) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x^2 - x + 5 \end{cases}$$

Por el método de sustitución

$$b) \begin{cases} y = 3x^2 + 2x + 1 \\ y = x^2 + x - 4 \end{cases}$$

Por el método de igualación

5)

Clasifica los siguientes sistemas

Dados los siguientes sistemas mixtos se pide

Resolver el sistema por método analítico

Completar el grafico

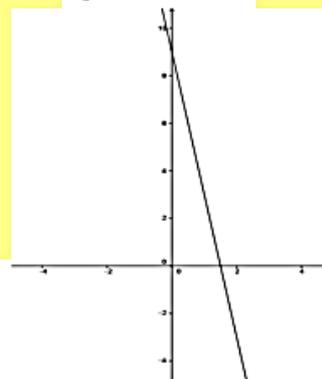
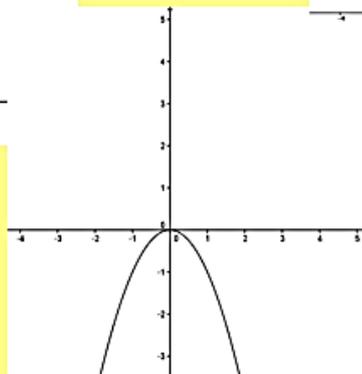
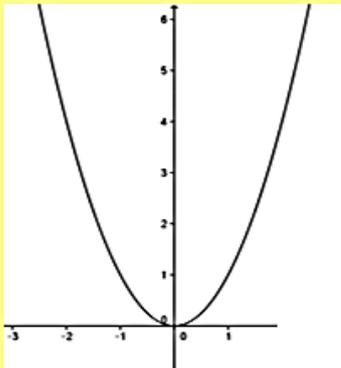
Dar el conjunto solución

Clasifica los siguientes sistemas

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

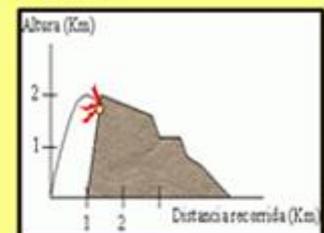
$$\begin{cases} y = -6x + 9 \\ y = -x^2 \end{cases}$$



6)

Problemas para interpretar plantear y resolver

- a • Lanzamos un proyectil. La altura alcanzada y (en Km) y los kilómetros recorridos x están relacionados por la ecuación $y = -2x^2 + 4x$. A 1 Km del lugar de lanzamiento se encuentra una montaña cuya ladera oeste sigue la recta de ecuación $y = 6x - 6$. Halla el punto de la montaña donde se producirá el impacto.



- b • El costo total de producción de " x " unidades de un determinado artículo está dado por la función $C(x) = x^2 + 2x + 360$ y los ingresos obtenidos por las ventas por $I(x) = -x^2 + 74x$. Se solicita
- Graficar las dos funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos
 - ¿Cuál son las restricciones que se deben realizar para que la situación tenga sentido?
 - ¿A partir de qué cantidad de unidades los costos igualan a las ganancias?
 - ¿Qué pasa para cantidades inferiores y para las mayores a la obtenida en el ítem anterior?
- c • Se lanza una pelota hacia arriba y simultáneamente un ave levanta vuelo. La trayectoria de la pelota se describe mediante la función $y = -3x^2 + 12x$ y la del vuelo del ave, mediante $y = 1,5x + 7,5$. Siendo (x,y) las coordenadas de la trayectoria
- Graficar las dos funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos
 - Obtener el o los puntos de encuentro de la pelota y el ave

ANEXO

Función cuadrática

- 1) Calcular el vértice de la siguiente función parabólica:

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$$

- 2) Encuentre el eje de simetría de:

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

- 3) Determinar los puntos de corte y el vértice de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^2 + 4x - 8$

b) $f(x) = x^2 + 1$

- 4) Representar la función:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- 5)

PROBLEMAS: APLICACIÓN DE FUNCIONES CUADRÁTICAS, MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO:

1) El rendimiento de nafta R (en km/litro) de un automóvil está relacionado con la velocidad (en km/hora) por la función $R(v) = -\frac{1}{3}v^2 + 60v$ $0 < v < 180$. a) Hallar la velocidad para la cual el rendimiento es máximo; b) Calcular el rendimiento máximo; c) Realiza el gráfico correspondiente indicando dominio e imagen de la situación

2) Una compañía de televisión por cable, de acuerdo a un estudio de mercado, sabe que el ingreso mensual de la empresa cuando la tarifa es de " x " dólares mensuales viene dada por la función: $R(x) = 500(300 - x) \cdot x$ $0 < x < 300$. a) Hallar cuál debe ser la tarifa mensual para que el ingreso sea máximo; b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

3) En una isla se introdujeron 112 venados. Al principio la manada empezó a crecer rápidamente pero, después de un tiempo, los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. Suponiendo que el número de venados $N(t)$ a los t años está dado por $N(t) = -t^2 + 22t + 112$ con $t > 0$. a) Realiza el gráfico de la función, indicando dominio e imagen; b) ¿A partir de qué año la población empezó a decrecer? c) ¿Cuál fue el número máximo de venados que hubo en la isla? ; d) ¿Se extingue la población? ¿Cuándo ocurre esto? e) ¿Cuántos venados había en la isla antes que se introdujera la cantidad mencionada anteriormente?