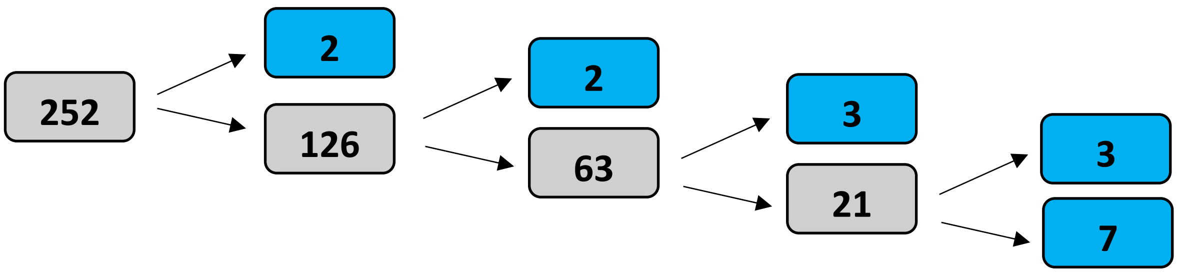
DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS EN SUS FACTORES PRIMOS

FACTORES PRIMOS → Los factores primos de un número son *sus divisores primos.*

Veamos el siguiente ejemplo:



Los números remarcados en celeste son los factores primos de 252. Esta forma de factorizar se denomina diagrama de árbol.

FACTORIZAR → Factorizar un número *es expresarlo como producto de sus factores primos.* Para cada número, esta descomposición es única y la forma de encontrarlos es a través del diagrama de árbol (esquema de arriba) o a través de la siguiente tabla:

Divido

	252	**2**	→ 2 es un divisor primo de 252
$252:2 =$	**126**	**2**	→ 2 es un divisor primo de 126
$126:2 =$	**63**	**3**	→ 3 es un divisor primo de 63
$63:3 =$	**21**	**3**	→ 3 es un divisor primo de 21
$21:3 =$	**7**	**7**	→ 7 es un divisor primo de 7
$7:7 =$	**1**		

De allí se puede expresar nuestro número factorizado: $252 = 2.2.3.3.7 = \mathbf{2^2.3^2.7}$

Si resolvemos todos los productos indicados en esta expresión, obtendremos de nuevo el número original.

Actividades de factorización

1) Descomponer en factores primos los siguientes números:

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

28	2
14	2
7	7
1	

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

125	5
25	5
5	5
1	

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

a) 80 = $2^4 . 5$

b) 28 = $2^2 . 7$

c) 81 = 3^4

d) 126= $2 . 3^2 . 7$

e) 125= 5^3

f) 100= $2^2 . 5^2$

2) Marca con una x los números que están correctamente factorizados:

a) $18 = 2 . 9$		d) $20 = 5 . 2^2$	X	g) $30 = 3 . 10$	
b) $36 = 2 . 3 . 6$		e) $40 = 2 . 5 . 4$		h) $42 = 7 . 2 . 3$	X
c) $50 = 2 . 25$		f) $75 = 5^2 . 3$	X	i) $100 = 10 . 10$	

3) Completar con el exponente que corresponde a cada caso:

a) $72 = 2^3 . 3^2$ b) $108 = 2^2 . 3^3$ c) $162 = 2^1 . 3^4$

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Situación problemática:

Daniela y Magalí fueron a correr alrededor de la plaza. Partieron juntas desde una de las esquinas de la plaza, en la que hay una fuente, y corrieron un largo rato manteniendo el ritmo constante. Daniela volvió a pasar frente a la fuente a los 20 minutos y Magalí a los 25 minutos. ¿Cuánto tiempo después de haber salido volvieron a pasar juntas por la fuente?

Para resolver este problema debemos analizar en qué minuto pasa cada una de las chicas frente a la plaza, por lo tanto, debemos encontrar los múltiplos de 20 y 25 y ver en que minuto se volverán a encontrar.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Los múltiplos de } 20 \textit{ son}: 20 , 40 , 60 , 80 , 100 , 120 , 140 , 160 , \textit{etc}. \\ \textit{Los múltoplos de } 25 \textit{ son}: 25 , 50 , 75 , 100 , 125 , 150 , 175 , \textit{etc}.. \end{array}\right\}$$

Daniela y Magalí se van a reencontrar en el minuto 100 (a una hora y cuarenta minutos desde que salieron)

MINIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

EL MÚLTIPLO COMÚN MENOR O MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO entre dos números a y b, es como su nombre lo indica, el menor de los múltiplos comunes a ambos números, y lo escribimos así: m.c.m.(a,b)

En el problema anterior el m.c.m entre 20 y 25 es 100. Se escribe: m.c.m.(20,25)=100

Ahora vamos a ver un método mas práctico para hallar el m.c.m. a través de los siguientes pasos:

1) Factorizar cada uno de los números afectados.
2) Realizar una multiplicación de los factores comunes elevados al mayor exponente y de los no comunes para hallar el m.c.m.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{20 = 2^2.5} \qquad \mathbf{25 = 5^2}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m.c.m.(20,25)} &= \mathbf{5^2.2^2} \\ &= \mathbf{25.4} \\ &= \mathbf{100} \end{aligned}$$

4) Hallar el m.c.m de los siguientes números:

a) $m.c.m.(120{,}90) =$ c) $m.c.m.(10{,}100) =$ e) $m.c.m.(40{,}60{,}36) =$

b) $m.c.m.(35{,}42) =$ d) $m.c.m.(11{,}29) =$ f) $m.c.m.(15{,}1) =$

a)

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$120 = 2^3.3.5$ $\quad 90 = 2.3^2.5$

$$\begin{aligned} m.c.m(120{,}90) &= 2^3.3^2.5 \\ &= 8.9.5 \\ &= 360 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$35 = 5.7$ $\quad 42 = 2.3.7$

$$\begin{aligned} m.c.m.(35{,}42) &= 5.7.3.2 \\ &= 210 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$100 = 5^2.2^2$ $\quad 10 = 2.5$

$$\begin{aligned} m.c.m.(10{,}100) &= 5^2.2^2 \\ &= 25.4 \\ &= 100 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{array}{r|l} 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} m.c.m.(29{,}11) &= 11.29 \\ &= 319 \end{aligned}$$

e)

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$40 = 2^3.5$ $\quad 60 = 2^2.3.5$ $\quad 36 = 2^2.3^2$

$m.c.m.(40,60,36) = 2^3.3^2.5$

$= 8.9.5$

$= 360$

f) $m.m.m(15,1) = 15$

5) Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) Dos abejas van en busca de polen al cantero con flores más cercano a su panal. Parten del panal a las 6 de la mañana. La primera lo hace cada 45 segundos, y la segunda, cada 30 segundos. ¿Cada cuántos segundo volverán a salir juntas del panal?

45	3
15	3
5	5
1	

30	2
15	3
5	5
1	

Rta: Las abejas se van a encontrar cada 90 segundos.

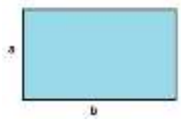
$45 = 3^2.5$ $\quad 30 = 2.3.5$

$m.c.m.(45,30) = 3^2.5.2$

$= 9.5.2$

$= 90$

b) ¿Cuáles son las medidas del cuadrado del menor tamaño posible que se puede cubrir en forma exacta con azulejos rectangulares de 8cm de base y 6cm de altura?



6	2
3	3
1	

8	2
4	2
2	2
1	

Rta: El cuadrado va a tener 24 cm de lado.

$6 = 2.3$ $\quad 8 = 2^3$

$m.c.m.(6,8) = 2^3.3$

$= 8.3$

$= 24$

c) En un vecindario, un camión de helados pasa cada 8 días y un food truck pasa cada dos semanas. Si hoy ambos vehículos pasaron en el mismo día, ¿cuándo volverán a encontrarse?

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$8 = 2^3$ $\qquad$ $14 = 2.7$

$$m.c.m.(8{,}14) = 2^3.7$$
$$= 56$$

Rta: Ambos camiones se van a volver a juntar cada 56 días

d) Un sitio turístico en el Caribe ofrece tres diferentes cruceros: uno tarda 6 días en ir y regresar a su punto de inicio, el segundo tarda 8 días y el tercero tarda 10 días. Si los tres cruceros partieron al mismo tiempo hace 39 días, ¿cuántos días faltan para que vuelvan a partir el mismo día todos los cruceros?

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$6 = 2.3$ $\qquad$ $8 = 2^3$ $\qquad$ $10 = 2.5$

$$m.c.m.(6{,}8{,}10) = 2^3.3.5$$
$$= 120$$

$$120 - 39 = 81$$

Rta: faltan 81 días para que vuelvan a salir el mismo día.

DIVISOR COMÚN MAYOR (D.C.M.)

Situación problemática:

Lautaro tiene 24 bolitas rojas y 30 bolitas verdes y las quiere repartir en bolsitas de manera que entre en cada una igual cantidad de bolitas de cada color y que esta cantidad sea la mayor posible. ¿Cuántas bolitas de cada color tiene que poner en cada bolsa? ¿Cuántas bolsas usará?

Para resolver este problema debemos analizar en cuántas bolsitas se pueden distribuir las bolitas de cada color sin que sobre ninguna. Por lo tanto debemos encontrar los divisores de 24 y 30 y ver que divisor es el que se repite en ambos, atendiendo a que debemos elegir el mayor de ellos. Este valor será

$$\left.\begin{array}{l} Los\ divisores\ de\ 24\ son:\ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. \\ Los\ divisores\ de\ 30\ son: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. \end{array}\right\}$$

Se van a utilizar 6 bolsas, ya que al dividir las 24 bolitas rojas y 30 bolitas verdes en las seis bolsitas no sobra ninguna.

El 6 es el Divisor común mayor (DCM) de 24 y 30.

Para responder la pregunta de cuántas bolitas de cada color tendrá cada bolsita, debemos hallar el resultado de dividir el total de cada color por ese DCM.

- Bolitas verdes → $30 : 6 = 5$
- Bolitas rojas → $24 : 6 = 4$

Rta: cada bolsita tendrá 5 bolitas verdes y 4 bolitas rojas.

EL DIVISOR COMÚN MAYOR O MÁXIMO COMÚN DIVISOR entre dos números a y b, es como su nombre lo indica, el mayor de los divisores comunes a ambos números, y lo escribimos así: $D.C.M.(a, b)$

En el problema anterior el D.C.M. entre 24 y 30 es 6. Se escribe: $D.C.M.(24,30) = 6$

Ahora vamos a ver un método más práctico para hallar el D.C.M. a través de los siguientes pasos:

1) Factorizar cada uno de los números afectados.
2) Realizar una multiplicación de los factores comunes con su menor exponente.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{24 = 2^3 . 3} \qquad \mathbf{30 = 2 . 3 . 5}$$

$$\mathbf{D.C.M.(24, 30) = 2 . 3}$$
$$\mathbf{= 6}$$

6) Calcular el D.C.M. de los siguientes números

a) $D.C.M.(42,56) =$ c) $D.C.M.(10,20) =$ e) $D.C.M.(90,20) =$

b) $D.C.M.(15,1) =$ d) $D.C.M.(11,23) =$ f) $D.C.M.(90,60,105) =$

a)

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$42 = 2.3.7$ $56 = 2^3.7$

D.C.M.(42,56) = 2.7
=14

b)

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

$15 = 3.5$ $1 = 1$

Cuando no hay DCM común se toma el número que es divisor común a todos los números: el 1
D.C.M.(15,1) = 1

c)

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$10 = 2.5$ $20 = 2^2.5$

D.C.M.(20,10) = 2.5
= 10

d) $11 = 11$ $23 = 23$

Cuando no hay DCM común se toma el número que es divisor común a todos los números: el 1
D.C.M.(11,23) = 1

e)

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$90 = 2.3^2.5$ $20 = 2^2.5$

D.C.M.(90,20) = 2.5
=10

f)

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

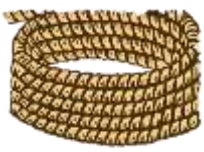
$90 = 2.3^2.5$ $60 = 2^2.3.5$ $105 = 3.5.7$

D.C.M.(90,60,105) = 3.5
=15

7) ¿Cuál es el número natural divisor común a todos los números naturales? El 1 (uno)

8) Resolver las siguientes situaciones problemáticas

a) Andrés tiene una cuerda de 120 metros y otra de 96 metros. Desea cortarlas de modo que todos los trozos sean iguales pero lo más largos posible. ¿Cuántos trozos de cuerda obtendrá? ¿Cuánto va a medir cada nueva cuerda?



$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$120 = 2^2.3.5$ $96 = 2^5.3$

$$D.C.M.(120,96) = 2^2.3 = 8.3 = 24$$

$120:24 = 5$

$96:24 = 4$

Rta: Van a quedar 9 trozos de cuerda de 24 metros cada una

b) Una empresa pequeña que vende leche cuenta con tres sucursales: una en el norte, una en el sur y una en el este. Sabemos que la sucursal del norte produce 300 botellas de leche diarios, la del sur produce 240 y la del este produce 360. Se quieren transportar estas botellas de leche en camionetas que lleven el mismo número de botellas, pero que sea el mayor número de botellas posible. ¿Cuántas botellas de leche debe transportar cada camioneta?

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$300 = 2^2.3.5^2$ $\quad$ $240 = 2^4.3.5$ $\quad$ $360 = 2^3.3^2.5$

$$D.C.M.(300,240,360) = 2^2.3.5 = 4.3.5 = 60$$

Rta: Cada camioneta repartirá 60 botellas de leche

A MODO DE RESUMEN ¿CÓMO HALLAR EL M.C.M. Y EL M.C.D?:

Descomposición en *Factores Primos*

- Factores ***comunes*** con el ***menor exponente.*** → **Máximo Común Divisor (M.C.D.)**
- Factores ***comunes y no comunes*** con el ***mayor exponente.*** → **mínimo común múltiplo (m.c.m.)**

Ejemplo:

12	2
6	2
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

$12 = 2^2 . 3$

$18 = 2 . 3^2$

$M.C.D._{(12, 18)} = 2 . 3$

$m.c.m._{(12, 18)} = 2^2 . 3^2$

Actividad: Descompone en factores primos los números dados y luego encuentra el m.c.m y el M.C.D. en cada caso

a) 52; 24; 38

b) 12; 18; 32

c) 27; 54; 63

d) 72; 108; 60

e) 24 , 45 , 150

f) 480 , 320

a)

$$\begin{array}{r|l} 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$52 = 2^2.13$ $\qquad 24 = 2^3.3$ $\qquad 38 = 2.19$

$D.C.M.(52,24,38) = 2$

$m.c.m.(52,24,38) = 2.3.13.19$
$= 5928$

b)

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2.3$ $\qquad 18 = 2.3^2$ $\qquad 32 = 2^5$

$D.C.M.(12,18,32) = 2$

$m.c.m.(12,18,32) = 2^5.3^2$
$= 288$

c)

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$27 = 3^3$ $\qquad 54 = 2.3^3$ $\qquad 63 = 3^2.7$

$D.C.M.(27,54,63) = 3^2$
$= 9$

$m.c.m.(27.54.63) = 3^3.2.7$
$= 378$

d)

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$72 = 2^3.3^2$ $\qquad 108 = 2^2.3^3$ $\qquad 60 = 2^2.3.5$

$D.C.M.(72,108,60) = 2^2.3$
$= 12$

$m.c.m.(72,108,60) = 2^3.3^3.5$
$= 1080$

e)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2^3.3$ $\qquad 45 = 3^2.5$ $\qquad 150 = 2.3.5^2$

$D.C.M.(27,54,63) = 3$

$m.c.m.(27.54.63) = 3^2.5^2.2^3$
$= 1800$

f)

$$\begin{array}{r|l} 480 & 2 \\ 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 320 & 2 \\ 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$480 = 2^5.3.5$ $\qquad 320 = 2^6.5$

$D.C.M.(480,320) = 5.2^5$
$= 160$

$m.c.m.(480,320) = 2^6.3.5$
$= 960$