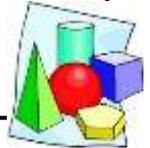


GEOMETRÍA

La **GEOMETRÍA** es parte de las matemáticas y etimológicamente, proviene de dos palabras griegas, **GEO : tierra** y **METRIA : medida**, es una ciencia que **estudia el tamaño y forma de las llamadas figuras geométricas**; estudiar el tamaño implica medir y calcular, éstas mediciones y cálculos pueden ser **lineales, superficiales o volumétricas** y para que estas operaciones sean posibles utiliza como herramientas imprescindibles la aritmética y el álgebra.

- **Aritmética:** Parte de la matemática que estudia los números y las operaciones que se hacen con ellos
- **Algebra:** Parte de las matemáticas que trata de la cantidad en general, representándola por medio de letras u otros signos (expresiones algebraicas, ecuaciones, etc.).



Orígenes de la Geometría



Los habitantes en la antigüedad, tales como los egipcios, los sumerios, los incas, los mayas, los chinos, etc. Tenían la predilección de ubicar sus terrenos de cultivos en los valles de los ríos con la finalidad de aprovechar el vital elemento que es el agua, pero ... ¿Qué sucedía cuando el caudal de las aguas crecían?, los terrenos eran inundados, las marcas puestas en estos eran borradas, ante estos acontecimientos, los habitantes de entonces tenían la imperiosa necesidad de recuperar sus terrenos, pero recuperarlos en su real dimensión, de manera ingeniosa y práctica utilizaron cuerdas, trozos de madera y otros elementos como instrumentos de medición con la finalidad de recuperar en tamaño y tal vez en forma lo que habían perdido, diremos entonces que **el hombre se inicia en la geometría por necesidad, necesidad de construir, reconstruir y edificar.**

También podemos ver la geometría en la construcción de las pirámides y monumentos históricos. Pero estos conocimientos eran producto de la práctica y por lo tanto no necesitaban demostración. Pero a partir de Tales de Mileto, hace unos 6 siglos antes de Cristo se inició la geometría demostrativa. Es a partir de allí **que las propiedades se demuestran por medios de razonamientos** y no porque resultan en la práctica.



Las demostraciones pasan a ser fundamentales y son la base de la Lógica como leyes del razonamiento. Los griegos, y entre ellos Euclides la construyeron observando directamente los cuerpos de la naturaleza. De ellos extrajeron los conceptos de **PUNTO, RECTAS Y PLANOS**, que forman la base de esta ciencia. Cualquier figura geométrica es un conjunto de puntos, rectas y planos. Estos tres conceptos sobre los cuales construimos la geometría, como todo concepto primario, no admiten una definición; por lo tanto, tenemos que recurrir a la intuición. **Estos conceptos intuitivos e indefinibles reciben el nombre de primeros principios, axiomas o postulados.**

División de la Geometría

Para un mejor estudio a la geometría se la divide en : **Geometría Plana y Geometría del Espacio.**

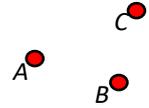
- **Geometría Plana:** Estudia las figuras planas que tienen únicamente dos dimensiones: largo y ancho. Por ejemplo: el triángulo, círculo, cuadrado, etc
- **Geometría del Espacio:** Estudia a los sólidos geométricos. Por Ejemplo: La pirámide, el prisma, la esfera etc.

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA

CONCEPTOS BÁSICOS

Para el estudio de la geometría, es indispensable conocer el concepto intuitivo de **punto, recta y plano**. Estos son términos no definidos que proveen el inicio de la geometría.

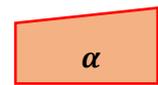
➤ **PUNTO** → Es el objeto fundamental en geometría. Representa solo posición y no tiene dimensión (es decir, no tiene ni largo, ni ancho, ni altura). Un ejemplo de punto es la huella que deja un lápiz bien afinado sobre un papel. Se representan por letras mayúsculas.



➤ **RECTA** → Es un conjunto infinito de puntos que se extienden en una dimensión en ambas direcciones y tiene solo longitud, no tiene ancho ni altura ni grosor. Una noción de recta es el borde de una hoja o un hilo tensado. Una recta se puede representar por letras minúsculas.



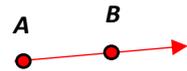
➤ **PLANO** → Un plano se puede pensar como un conjunto infinito de puntos. Tiene dos dimensiones, largo y ancho (sin altura ni grosor) y tiene una extensión ilimitada. Un ejemplo de plano es el piso o alguna superficie. Se denota utilizando letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, etc.$



Con estos tres elementos se pueden determinar:

➤ **SEMIRRECTA** → la definimos como la porción de una recta que tiene principio, pero no tiene fin. Ese principio está determinado por un punto.

\overrightarrow{AB} se lee: "Semirrecta de origen A que contiene al punto B".

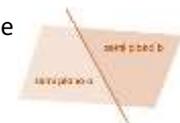


➤ **SEGMENTO** → es una porción de la recta con principio y con fin que está determinado por dos puntos, es decir sabemos dónde empieza y donde termina por ende lo podemos medir

\overline{AB} se lee: "Segmento AB"

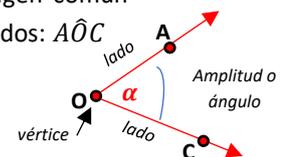


➤ **SEMIPLANO** → Al trazar una recta en un plano, este queda dividido en dos partes. Cada una de estas partes se llama **semiplano**.



➤ **ÁNGULO** → Es la porción del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común llamado vértice. El ángulo se nombra se puede nombrar por los puntos comprendidos: \widehat{AOC} O con letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, etc.$

\widehat{AOC} se lee: "Ángulo \widehat{AOC} " o α se lee: "Ángulo alfa"



AXIOMAS CARACTERÍSTICOS

Un axioma es una verdad universal que debido a su evidencia no necesita demostración. Suele ser la base de cualquier tipo de teoría o teorema. Veamos los 6 primeros axiomas en relación a los puntos, rectas y planos

1) "Existen infinitos puntos"

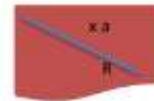
2) "Dos puntos determinan una recta"



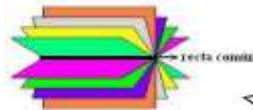
3) "Por un punto pasan infinitas rectas"



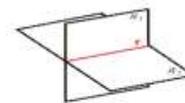
4) "Una recta y un punto fuera de ella determinan un plano"



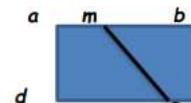
5) "Por una recta pasan infinitos planos"



6) "Dos planos se cortan en una línea recta, recta de intersección"



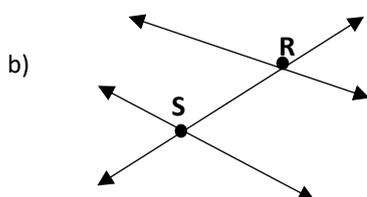
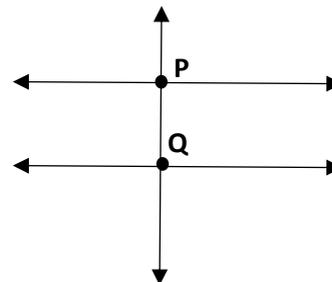
7) "La recta determinada por dos puntos de un plano pertenece a dicho plano"



Actividades

1) Observar las siguientes rectas que se cortan en los puntos P y Q, según los colores indicados:

- a)
- De azul, el segmento PQ
 - De verde, tres semirrectas de origen P
 - De violeta, una recta que pasa sólo por Q
 - Traza una semirrecta desde el segmento PQ



- De azul, el segmento RS
- De verde, tres semirrectas de origen S
- De violeta, una recta que pase sólo por R

2) Indicar si las siguientes líneas son rectas, semirrectas o segmentos:

- a) b) c) d)

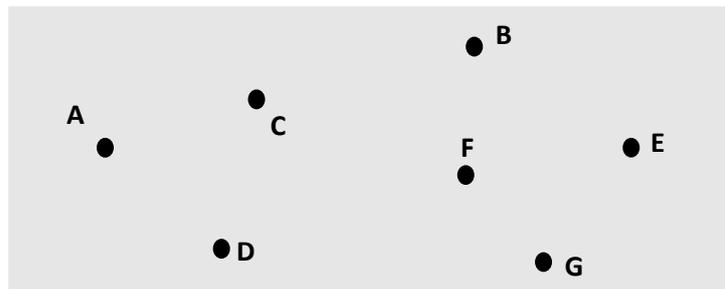
- 3) Dibujar lo solicitado en cada caso (utilizar diferentes colores) y escribir cómo se menciona cada elemento dibujado:



- a) $\overline{AB} \rightarrow$
 b) $\overrightarrow{DE} \rightarrow$
 c) $\overleftarrow{BC} \rightarrow$
 d) $\widehat{DAC} \rightarrow$

- 4) Dibujar lo que se pide en cada caso y representar:

- a) Una semirrecta de origen A que pase por el punto D \rightarrow
 b) Una recta que pase por los puntos C y D \rightarrow
 c) Un ángulo con vértice en G y que pase por los puntos E y F \rightarrow
 d) Un segmento determinado por los puntos F y B



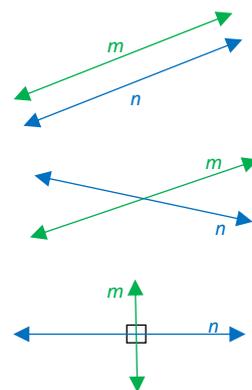
- 5) Completar la frase con los elementos que conocemos hasta el momento: **punto, recta, plano, semirrecta, segmento, semiplano, ángulo** (se pueden repetir las palabras).

- a) La intersección de dos rectas forma un _____.
 b) Un _____ es una porción de recta limitada por dos puntos.
 c) Una línea _____ no comienza, ni termina.
 d) Una línea recta limitada por un extremo se denomina _____.
 e) Un punto situado sobre una recta la divide en dos _____.
 f) Una recta que atraviesa un plano, lo divide en dos _____.
 g) Tres puntos no alineados determinan un _____.
 h) Un _____ tiene principio y fin (determinado por dos puntos).
 i) Una recta está formada por infinitos _____ alineados.
 j) Al unir dos semirrectas opuestas por sus respectivos puntos de origen, se forma una _____.
 k) Por un punto, pueden pasar infinitas _____.

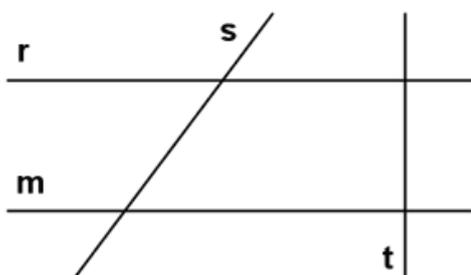
Veamos algunas clasificaciones y propiedades

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

- **RECTAS PARALELAS:** Son rectas que no se intersecan (encuentran) en ningún punto. m y n son paralelas y se denotan de la siguiente manera: $m // n$
- **RECTAS OBLICUAS:** Son rectas que se intersecan en cualquier punto, pero no determinan ángulos rectos. m y n son secantes y se denotan de la siguiente manera: $m \not\perp n$
- **RECTAS PERPENDICULARES:** Se intersecan formando cuatro ángulos rectos (de 90°). m y n son perpendiculares y se denotan de la siguiente manera: $m \perp n$

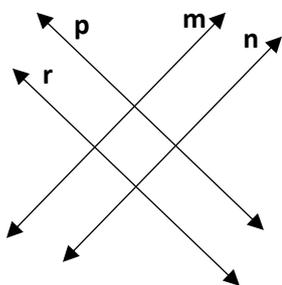


6) Clasificar las siguientes rectas en paralelas $//$, perpendiculares \perp y oblicuas $\not\perp$



- a) r s
- b) r t
- c) m s
- d) r m

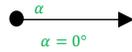
7) Completar con "paralela" o "perpendicular" según corresponda:



- a) p es _____ a r
- b) m es _____ a p
- c) n es _____ a r
- d) r es _____ a p
- e) m es _____ a r

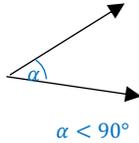
CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS SEGÚN SU AMPLITUD

➤ **NULO** → Mide 0°



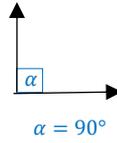
➤ **ÁNGULOS CONVEXOS** → Son aquellos que miden mas que 0° y menos que 180° y se clasifican en agudos, obtusos y rectos.

ÁNGULO AGUDO



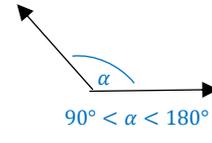
Miden menos que 90°

ÁNGULO RECTO



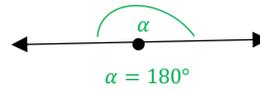
Mide exactamente 90°

ÁNGULO OBTUSO

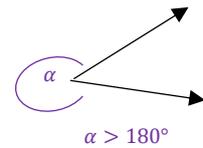


Mide mas que 90° y menos que 180°

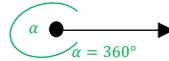
➤ **ÁNGULO LLANO** → Mide exactamente 180°



➤ **ÁNGULOS CÓNCAVOS** → Son aquellos que miden mas de 180° y menos que 360°



➤ **UN GIRO COMPLETO** → Mide 360°



8) Completar con nulo, agudo, recto, obtuso, llano, concavo o un giro y construirlo:

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) Un ángulo de 40° es _____ | e) Un ángulo de 180° es _____ |
| b) Un ángulo de 170° es _____ | f) Un ángulo de 60° es _____ |
| c) Un ángulo de 90° es _____ | g) Un ángulo de 125° es _____ |
| d) Un ángulo de 0° es _____ | h) Un ángulo de 360° es _____ |

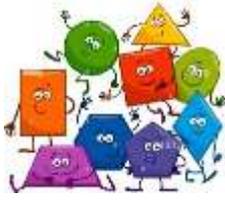
9) Expresar si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas y justificar:

- Un ángulo llano tiene mayor amplitud que un ángulo obtuso ____
- Las rectas perpendiculares son aquellas que se cortan formando cuatro ángulos distintos ____
- Un ángulo recto tiene, a veces, una amplitud menor a un ángulo obtuso. ____
- Un segmento es un trozo de recta delimitado por dos puntos. ____
- Dos rectas son paralelas cuando se cortan entre sí. ____

10) Relaciona los siguientes ángulos con sus medidas:

- | | |
|--------------------|---|
| 1. Ángulo obtuso | a. Ángulo que mide menos de 90° |
| 2. Ángulo completo | b. Mide 0° |
| 3. Ángulo llano | c. Un ángulo de 90° |
| 4. Ángulo nulo | d. Ángulo de 360° |
| 5. Ángulo agudo | e. Un ángulo que mide más de 90° |
| 6. Ángulo recto | f. Mide dos rectos |

FIGURAS GEOMETRICAS



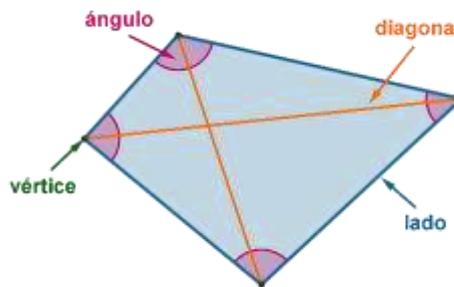
A través de los elementos se pueden determinar diferentes figuras geométricas. Las mismas se clasifican en **FIGURAS PLANAS** o **POLIGONOS** (círculo, cuadrado, rectángulo, triángulo, polígonos, etc.) y **CUERPOS GEOMETRICOS** (esfera, prisma, cubo, etc.)

POLIGONOS

Un polígono es una figura geométrica limitada por segmentos de recta denominados lados, donde el extremo de un segmento es el origen del otro. Etimológicamente, la palabra POLÍGONO proviene de las raíces “poli” que significa muchos y “gonos” que significa ángulos. Los polígonos se nombran mediante letras mayúsculas situadas en los vértices del mismo. Su notación se efectúa escribiendo las letras mayúsculas después de la palabra polígono o del nombre específico del polígono (triángulos, cuadrado, rectángulo, etc.)

Elementos de los polígonos:

- Lados
- Ángulos
- Vértices
- Diagonales



CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS:

REGULARES	IRREGULARES
Tienen todos sus lados y ángulos iguales	Cuando al menos uno de sus lados o ángulos es diferente a los demás

¿Qué polígonos conocemos?

Número de lados	Nombre del polígono
3 lados	Triángulo
4 lados	Cuadrilátero
5 lados	Pentágono
6 lados	Hexágono
7 lados	Heptágono
8 lados	Octógono
9 lados	Eneágono
10 lados	Decágono

Número de lados	Nombre del polígono
11 lados	Endecágono
12 lados	Dodecágono
15 lados	Pentadecágono
20 lados	Icoságono
A los demás polígonos se los nombra por sus lados: “polígonos de 13 lados” , “polígono de 25 lados”	

A su vez, algunos polígonos se clasifican según sus ángulos y según sus lados.

TRIÁNGULOS

Se tratan de polígonos que tienen tres lados, tres ángulos y tres vértices; además, pueden clasificarse según **SUS LADOS Y SEGÚN SUS ÁNGULOS**:

SEGÚN SUS LADOS

- **Equilátero**



3 lados iguales

- **Isósceles**



2 lados iguales

- **Escaleno**



ningún lado igual

SEGÚN SUS ÁNGULOS

- **Acutángulo**



3 ángulos agudos (menores de 90°)

- **Rectángulo**



1 ángulo recto (de 90°)

- **Obtusángulo**

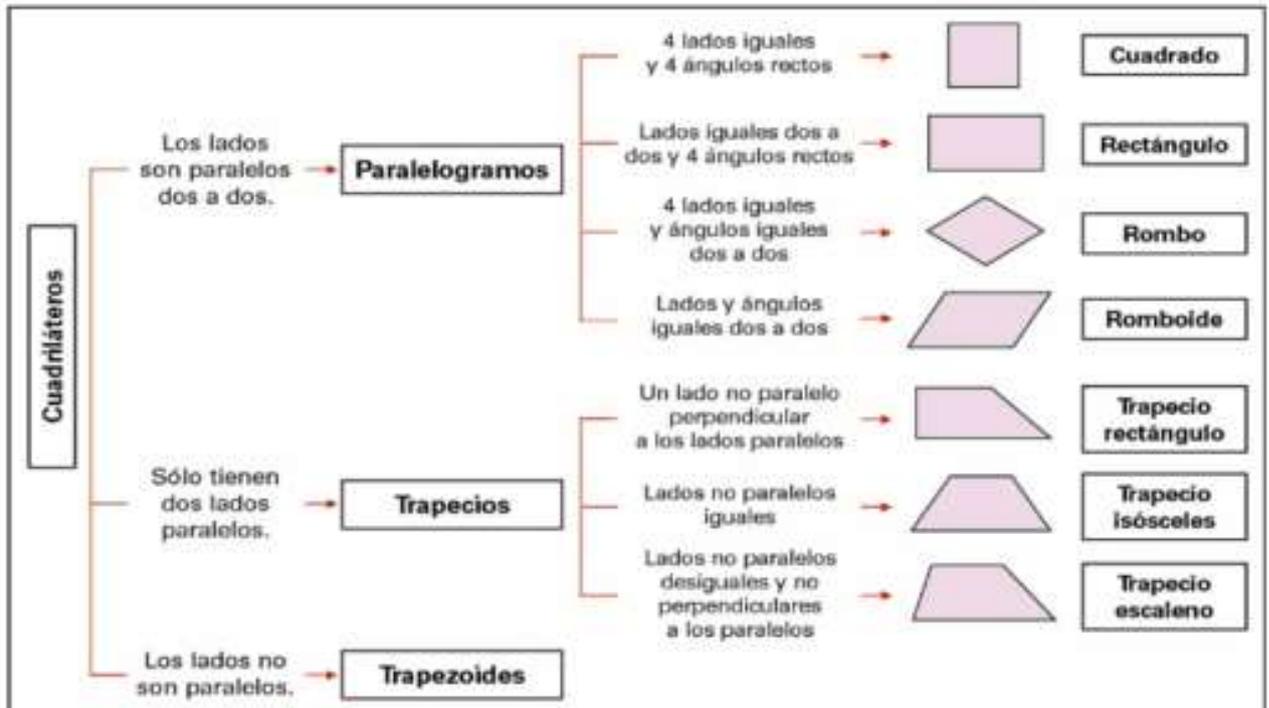


1 ángulo obtuso (mayor de 90°)

CUADRILATEROS

Estos son los polígonos que cuentan con cuatro lados, y que, a su vez se dividen en dos categorías:

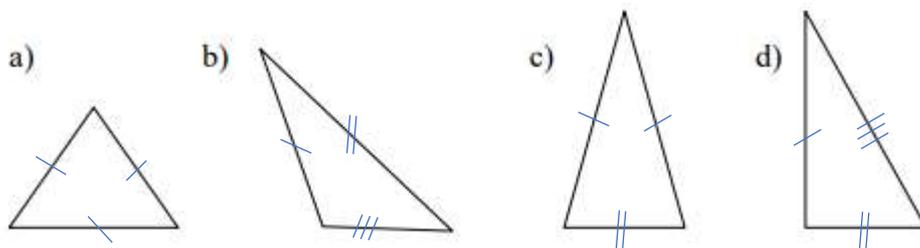
PARALELOGRAMOS, TRAPECIOS Y TRAPEZOIDES



11) Relacionar cada triángulo con su definición:

- | | |
|--------------------------|---|
| 1. Triángulo rectángulo | a. Sus tres ángulos son agudos |
| 2. Triángulo escaleno | b. Tiene los tres lados iguales |
| 3. Triángulo equilátero | c. La medida de sus tres lados es diferente |
| 4. Triángulo obtusángulo | d. Sólo dos de sus lados son iguales |
| 5. Triángulo isósceles | e. El que tiene un ángulo recto |
| 6. Triángulo acutángulo | f. Tiene un ángulo obtuso – |

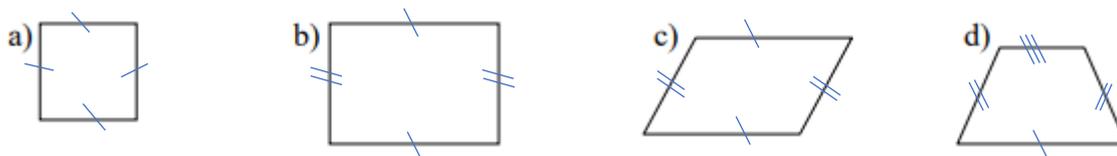
12) Clasifica los siguientes triángulos según sus ángulos y según sus lados:



13) Completa la tabla, relacionando cada polígono con sus características: Cuadrado / Rombo / Hexágono / Pentágono / Triángulo / Rectángulo.

- a) Tiene cuatro ángulos rectos y sus lados son iguales dos a dos: _____.
- b) Polígono que tiene tres lados y tres ángulos: _____.
- c) Tiene cuatro lados iguales y ángulos iguales dos a dos: _____.
- d) Polígono que tiene seis lados y seis ángulos: _____.
- e) Paralelogramo de cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos: _____.
- f) Polígono que tiene cinco lados y cinco ángulos: _____.

14) Escribe el nombre de los siguientes cuadriláteros. Clasifícalos en paralelogramos y no paralelogramos.



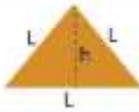
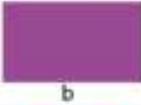
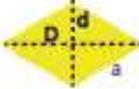
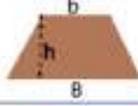
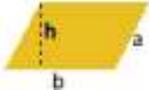
PERIMETRO Y ÁREA

- **PERÍMETRO** → El perímetro es la distancia alrededor de un objeto. Es la suma de las longitudes de todos los lados de un polígono cualesquiera, es decir, el contorno de la figura.
- **ÁREA** → El área es la superficie que está delimitada por el perímetro. Dependiendo de la figura, existen diferentes fórmulas que permiten encontrar el área.



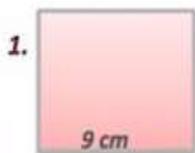
Veamos algunas fórmulas:

Formulario de Perímetros y Áreas

Dibujo	Nombre	Fórmulas	
		Perímetro	Área
	Triángulo	$P = L + L + L$	$A = \frac{b \times h}{2}$
	Cuadrado	$P = 4L$	$A = L \times L$ $A = L^2$
	Rectángulo	$P = 2a + 2b$	$A = b \times a$
 $\pi = 3,1416$	Círculo	$P = D \times \pi$	$A = \pi \times r^2$
	Rombo	$P = 4a$	$A = \frac{D \times d}{2}$
	Pentágono	$P = 5L$	$A = \frac{P \times a}{2}$
	Hexágono	$P = 6L$	$A = \frac{P \times a}{2}$
	Trapezio	$P = L + L + L + L$	$A = \frac{(B \times b) \times h}{2}$
	Paralelogramo	$P = 2a + 2b$	$A = b \times h$

Actividades:

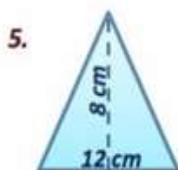
15) Hallar el área y el perímetro de las siguientes figuras:



Área:
Perímetro:



Área:
Perímetro:



Área:
Perímetro:

16) Plantear la ecuación y resolver los siguientes problemas:

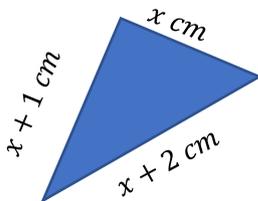
- a) El perímetro de un rectángulo es de 34 cm. La base es 3 cm más larga que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
- b) El perímetro de un triángulo isósceles es de 28 cm. Si la base es 2 cm más larga que cada uno de los lados. ¿Cuánto mide cada lado?

17) A partir de observar las siguientes figuras clasificarlas, plantear la ecuación y hallar la longitud de cada uno de los lados.

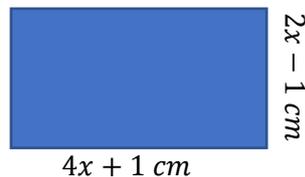


$3x + 1 \text{ cm}$

Perímetro del cuadrado: 52 cm



Perímetro del triángulo: 18 cm



Perímetro del rectángulo: 36 cm